Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 15.
Dimensión de álgebras afines

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1]Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

15 Dimensión de álgebras afines

15.1 Sea F un cuerpo y $\mathfrak{a}$ el ideal de $F[X_1, \ldots, X_n]$ generado por los polinomios de primer grado siguientes:

$$f_1 = b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} X_j, \; \ldots, \; f_m = b_m - \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Sea r el rango del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Comprobar que la dimensión de Krull de $F[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ es $n - r$.

15.2 Sea K/F una extensión de cuerpos y A una F-álgebra afín. Comprobar que $\dim(K \otimes_F A) = \dim A$.

15.3 Sean A y B álgebras afines sobre el cuerpo F. Comprobar que $A \otimes_F B$ es una F-álgebra afín, siendo además

$$\dim(A \otimes_F B) = \dim A + \dim B.$$

15.4 Sea A un álgebra afín sobre el cuerpo F. Supóngase que $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_t$ son los ideales primos minimales de A y $K_1, \ldots, K_t$ los cuerpos de cocientes de $A/\mathfrak{p}_1, \ldots, A/\mathfrak{p}_t$. Demostrar que

$$\dim A = \max\{\operatorname{trdeg}(K_i/F) : \; i \in \{1, \ldots, t\}\}$$

15.5 Demostrar que un álgebra afín tiene dimensión de Krull nula si y sólo si es finito-dimensional.