Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 1.
Ideales primos y maximales.
Nilradical y radical de Jacobson

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1] Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares

1 Ideales primos y maximales. Nilradical y radical de Jacobson

1.1 Comprobar que un ideal $\mathfrak{p}$ del anillo A es primo si y sólo si, cada vez que se tenga una inclusión $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales de A, se satisface alguna de las inclusiones $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ o $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$.

1.2 Mostrar que para ideales arbitrarios $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ del anillo A se satisfacen las afirmaciones siguientes:

(a) $\mathfrak{a} \subset \mathrm{r}(\mathfrak{a})$,

(b) $\mathrm{r}(\mathfrak{a}) = A$ si y sólo si $\mathfrak{a} = A$,

(c) $\mathrm{r}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathrm{r}(\mathrm{r}(\mathfrak{a}) + \mathrm{r}(\mathfrak{b}))$,

(d) $\mathrm{r}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathrm{r}(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{r}(\mathfrak{b}) = \mathrm{r}(\mathfrak{ab})$.

Comprobar que se tiene además $\mathrm{r}(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A y cualquier entero $n > 0$.

1.3 Determinar los ideales radicales del anillo de enteros $\mathbb{Z}$, así como del anillo de polinomios en una indeterminada y con coeficientes en el cuerpo F.

1.4 Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales del anillo A. Supóngase que $\mathfrak{a}$ es de generación finita y que $\mathfrak{a} \subset \mathrm{r}(\mathfrak{b})$. Demostrar la existencia de algún entero positivo n tal que $\mathfrak{a}^n \subset \mathfrak{b}$.

1.5 Sea A un anillo. Comprobar que en el caso en que A es dominio de integridad la igualdad de ideales $(x) = (y)$ es equivalente a la existencia de algún elemento inversible $c \in A$ tal que $y = cx$. Mostrar que la hipóteis de ser A dominio de integridad no puede ser suprimida [Indicación. Considerar, por ejemplo, el anillo

$$F[X, Y, Z, T]/(X - YZ,\ Y - TX),$$

siendo F un cuerpo]

1.6 Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales comaximales de un anillo A. Comprobar que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^2 = A$. Demostrar que $\mathfrak{a}^n$ y $\mathfrak{b}^m$ son comaximales para cualesquiera enteros $n, m \geq 1$.

1.7 Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales de un anillo A tales que $\mathrm{r}(\mathfrak{a})$ y $\mathrm{r}(\mathfrak{b})$ son comaximales. Demostrar que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son también comaximales.

1.8 Sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo de anillos. Comprobar que B es local si lo es A.

1.9 Sea $\mathfrak{a}$ un ideal propio del anillo A. Demostrar que la igualdad $\mathfrak{a} = \mathrm{r}(\mathfrak{a})$ es equivalente a que $\mathfrak{a}$ sea una intersección de ideales primos.

1.10 Sea A el anillo $\mathcal{C}[0,1]$ de las funciones continuas con valores reales definidas en el intervalo $[0,1]$. Mostrar que una función $f \in A$ es un divisor de cero si y sólo si el conjunto de los puntos x para los que $f(x) = 0$ contiene un intervalo abierto no vacío.

1.11 Mostrar que en las álgebras finito-dimensionales sobre un cuerpo F los ideales primos y los ideales maximales coinciden.

1.12 Demostrar que en un anillo A la suma de un elemento inversible con uno nilpotente es siempre inversible.

1.13 Sea A un anillo y $\mathfrak{a}$ un ideal contenido en el nilradical de A. Mostrar que todo elemento x que se transforma por el homomorfismo de proyección en un elemento inversible de $A/\mathfrak{a}$ es también inversible.

1.14 Sea F un cuerpo y $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un elemento de F^n. Demostrar que los polinomios $f \in F[X_1, \ldots, X_n]$ que admiten a x por raíz constituyen un ideal que coincide con

$$(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n).$$

1.15 Sea A un anillo, $\mathfrak{p}$ un ideal primo y x un elemento de A que no pertenece a $\mathfrak{p}$. Demostrar que existen elementos maximales en la familia de los ideales de A que contienen a $\mathfrak{p}$ y no contiene a ninguna de las potencias $x, x^2, x^3, \ldots$, siendo además primo cada uno de estos ideales.

1.16 Sea A un anillo en el que todo ideal no contenido en el nilradical contiene algún elemento idempotente no nulo. Demostrar que el nilradical y el radical de Jacobson de A coinciden.

1.17 Sea A un anillo en el que para cada $x \in A$ existe algún entero $n_x > 1$, dependiente de x, tal que $x^{n_x} = x$. Demostrar que todo ideal primo de A es maximal.

1.18 Sea F un cuerpo. Un ideal del anillo de polinomios $F[X_1, \ldots, X_n]$ se dice que es un ideal *monomial* si admite un sistema de generadores constituido por monomios. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal monomial de $F[X_1, \ldots, X_n]$

(a) Comprobar que si $\mathfrak{a}$ es un ideal monomial de $F[X_1, \ldots, X_n]$ entonces la condición necesaria y suficiente para que un monomio del anillo de polinomios pertenezca a $\mathfrak{a}$ es que sea divisible por alguno de los monomios del sistema de generadores monomial dado.

(b) Mostrar que un polinomio $f \in F[X_1, \ldots, X_n]$ pertenece a un ideal monomial si y sólo si cada uno de los monomios que aparecen en f pertenece a $\mathfrak{a}$.

(c) Determinar los ideales monomiales primos de $F[X_1, \ldots, X_n]$.

(d) Describir el radical de $\mathfrak{a}$ en términos de los monomios de un sistema de generadores de $\mathfrak{a}$.

(e) Caracterizar los ideales monomiales radicales.

1.19 Sea M un A-módulo, N_0 un submódulo de M, y S un subconjunto de M tal que $N_0 \cap S = \emptyset$. Comprobar que la familia de los submódulos de M que contienen a N_0 y no cortan a S tiene elementos maximales respecto a la inclusión. Demostrar que todo A-módulo $M \neq 0$ finitamente generado tiene algún submódulo maximal; esto es, que es maximal entre los submódulos propios de M.

1.20 Un anillo A se dice de *Boole* si $x^2 = x$ para todo $x \in A$. Demostrar que en un anillo de Boole se satisfacen cada una de las afirmaciones siguientes:

(a) $2x = 0$ para todo $x \in A$.

(b) Cada ideal primo $\mathfrak{p}$ es maximal y $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo con dos elementos.

(c) Cada ideal de A finitamente generado es principal.

Demostrar que en un anillo de Boole la conmutatividad del producto es superflua.

1.21 Sea A un anillo unitario (que no se supone conmutativo). Demostrar que si para todo $x \in A$ el elemento $x^2 - x$ está en el centro, entonces el anillo A es conmutativo.

1.22 (Ideales primos y el problema de las damas que no se toman). Asociamos un par de números a cada uno de los escaques de un tablero de ajedrez por numeración de filas y columnas (de $(1,1)$ hasta $(8,8)$). Considerar el anillo de polinomios A sobre el cuerpo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en las indeterminadas $X_{(1,1)},\ X_{(1,2)}, \ldots, X_{(8,8)}$ y el ideal $\mathfrak{a}$ generado por los productos $X_{(i,j)}X_{(k,l)}$ para los que es posible realizar una jugada de dama del escaque correspondiente a (i,j) al asociado con (k,l). Mostrar que un ideal primo $\mathfrak{p}$ contiene a $\mathfrak{a}$ si y sólo si el conjunto de las indeterminadas que no pertenecen a $\mathfrak{p}$ representan posiciones que pueden ser ocupadas por damas sin que ningún par de ellas puedan tomarse mediante un movimiento legal.

1.23 Mostrar que si F es un cuerpo infinito el ideal (X, Y) de $F[X, Y]$ está contenido en una unión infinita de ideales primos sin estar contenido en ninguno de ellos.

1.24 Comprobar que un anillo A es local si y sólo si los elementos no inversibles de A constituyen un ideal.

1.25 Mostrar que un anillo A tiene un único ideal primo si y sólo si todo elemento es inversible o nilpotente.

1.26 Sea Σ un espacio topológico. Supóngase que para cada dos puntos distintos x e y de Σ existe siempre alguna función continua $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Sean $x, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ puntos distintos de Σ ($n \geq 1$). ¿Como puede utilizarse la exclusión de primos para mostrar la existencia de alguna función continua $h : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ que se anula en x, pero no en ninguno de los puntos x_i? ¿Puede darse explicitamente una función de este tipo?

1.27 Sea A un dominio de integridad, i, j enteros estrictamente positivos primos relativos. Demostrar que el ideal $(X^i - Y^j)$ es primo en $A[X, Y]$. [Indicación: Definir un homomorfismo $\varphi : A[X, Y] \longrightarrow A[Z]$ cuyo núcleo sea este ideal].

1.28 Supóngase que el anillo A tiene un ideal $\mathfrak{p}$ que es maximal respecto a la inclusión en la familia de los ideales no principales de A. Demostrar que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo. [Indicación. Observar que una inclusión del tipo $\mathfrak{p} \subset (x)$ implica $\mathfrak{p} = x(\mathfrak{p} : x)$ siendo $(\mathfrak{p} : x) = \{y \in A : \quad yx \in \mathfrak{p}\}$]

1.29 Sea A un anillo y $\mathcal{I}$ el conjunto de los ideales de A en los que cada elemento es un divisor de cero. Demostrar que $\mathcal{I}$ tiene elementos maximales respecto a la inclusión, los cuales son ideales primos de A.

1.30 Sea F un cuerpo. Comprobar que el ideal generado por $Y^2 - X^3$ es primo en el anillo de polinomios $F[X, Y]$.

1.31 Sea A un anillo y S un subconjunto multiplicativo de él. El subconjunto S se dice *saturado* si, para cualesquiera x, $y \in A$, la afirmación $xy \in S$ es equivalente a que tanto x como y pertenezcan a S.

(a) Demostrar que S es saturado si y sólo si el complementario de S en A es unión de ideales primos.

(b) Mostrar que existe un único subconjunto multiplicativo saturado $\bar{S}$ que contiene a S y a cualquier subconjunto multiplicativo saturado que contenga a S. Comprobar que $\bar{S}$ coincide con el complemento en A de la unión de los ideales primos de A que no cortan a S. [Al subconjunto $\bar{S}$ se denomina *saturación* de S en A].

1.32 Sea A un anillo distinto de cero y $\mathcal{S}$ la familia de todos los subconjuntos multiplicativamente cerrados que no contienen a 0. Mostrar que $\mathcal{S}$ tiene elementos maximales respecto a la inclusión y que $S \in \mathcal{S}$ es maximal si y sólo si el complementario de S en A es un ideal primo minimal de A. En particular, los anillos no nulos tienen ideales primos minimales (esto es; minimales respecto a la inclusión entre los ideales primos del anillo A).

1.33 Mostrar que el conjunto S_0 de los no divisores de cero de un anillo A es un subconjunto multiplicativo saturado. Comprobar que el conjunto de los divisores de cero de A es una unión de ideales primos. Demostrar que la unión de los ideales primos minimales de A está contenida en el conjunto de los divisores de cero.

1.34 Sea $A \neq 0$ un anillo reducido con únicamente un conjunto finito de ideales primos minimales $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$. Demostrar que el conjunto de los divisores de cero de A coincide con $\bigcup_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i$.

1.35 Demostrar que en un anillo local no existe ningún idempotente distinto de 0 y 1.

1.36 Comprobar que en un anillo A son equivalentes las afirmaciones siguientes:

(a) Para todo $x \in A$ existe algún $y \in A$ tal que $x^2 y = x$.

(b) Cada ideal principal está generado por un idempotente.

(c) Todo ideal de generación finita está generado por un idempotente.

(d) Cada ideal de generación finita de A es un sumando directo de A.

Un anillo A en el que se satisfecen las condiciones anteriores se dice que es *absolutamente plano*. Comprobar que un anillo, en el que para todo elemento x exista algún entero $n > 1$ (dependiente de x) tal que $x^n = x$, es absolutamente plano y que, en particular, son absolutamente planos los anillos de Boole. Mostrar que el nilradical y el radical de Jacobson de un anillo absolutamente plano es nulo.

1.37 Mostrar que los anillos locales absolutamente planos son cuerpos. Las imágenes homomórficas de anillos absolutamente planos, ¿son absolutamente planas? Justificar que en un anillo absolutamente plano los elementos no inversibles son divisores de cero.

1.38 Se denota por $\mathcal{E}_n$ el anillo de gérmenes de funciones en el origen de $\mathbb{R}^n$ que son infinitamente diferenciables. Demostrar que $\mathcal{E}_n$ es un anillo local. Sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de $\mathcal{E}_1$. Comprobar que la aplicación f definida mediante la igualdad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es $\mathcal{C}^\infty$ y su germen pertenece a $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n$.

1.39 Sea A un anillo. Demostrar la equivalencia de las condiciones dadas a continuación.

(a) A es local y todo ideal finitamente generado de A es principal.

(b) Los ideales principales de A constituyen un conjunto totalmente ordenado respecto a la inclusión.

(c) El conjunto de todos los ideales de A, respecto a la inclusión, es un conjunto totalmente ordenado.

Un anillo A para el que se satisfacen las condiciones equivalentes anteriores se dice que es *local aritmético*.

1.40 Sea D un dominio local aritmético y F su cuerpo de cocientes. Demostrar que para cada elemento x de F se tiene alguna de las alternativas siguientes: (i) $x \in D$; o (ii) $x \neq 0$ y $x^{-1} \in D$.

1.41 Sea A un anillo local en el que el retículo de sus ideales es distributivo. Demostrar que el conjunto de los ideales maximales de A está totalmente ordenado respecto a la inclusión.

1.42 Sea B una A-álgebra finitamente generada y M un B-módulo de tipo finito. Supóngase que $\{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto de generadores de la A-álgebra B tal que $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{r}(\mathrm{Ann}_B\, M)$. Mostrar que M es finitamente generado como A-módulo.

1.43 Sea A un anillo y $A[X]$ el correspondiente anillo de polinomios en la indeterminada X. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polinomio arbitrario de $A[X]$. Demostrar cada una de las afirmaciones siguientes:

(a) El polinomio f es inversible en $A[X]$ si y sólo si a_0 es inversible en A y cada uno de sus restantes coeficientes es nilpotente.

(b) f es nilpotente si y sólo si todos los a_i son nilpotentes.

(c) f es divisor de cero si y sólo si existe algún elemento no nulo a de A tal que $af = 0$.

1.44 Generalizar los resultados del ejercicio anterior a un anillo en un número finito de indeterminadas.

1.45 Demostrar que, en el caso en que el nilradical y el radical de Jacobson de un anillo A coincidan, deben hacerlo también el nilradical y el radical de Jacobson del anillo de polinomios $A[X]$.

1.46 Sea D un dominio de integridad, a y b elementos de A tales que $(a) \cap (b) = (ab)$. Demostrar que $D[X]/(aX+b)$ es un dominio de integridad. [Indicación. Si $a \neq 0$ considerar el elemento $-b/a$ en el cuerpo de cocientes K de D y demostrar que el núcleo del homomorfismo $\varphi : D[X] \longrightarrow K$ que transforma X en $-b/a$ e induce la identidad sobre D coincide con $(aX + b)$]

1.47 Sea A un anillo y $A[[X]]$ el correspondiente anillo de series formales con coeficientes en A. Comprobar cada una de las afirmaciones siguientes:

(a) Un elemento $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$ es inversible en $A[[X]]$ si y sólo si a_0 es inversible en A.

(b) Si f es nilpotente entonces cada uno de los coeficientes de la serie formal es nilpotente en A.

(c) La condición necesaria y suficiente para que $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$ pertenezca al radical de Jacobson de $A[[X]]$ es que a_0 esté en el radical de Jacobson de A.

1.48 Sea A un anillo y $\mathcal{N}$ su nilradical. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) El anillo A tiene un único ideal primo $\mathfrak{p}$.

(b) Cada elemento de A es inversible o nilpotente.

(c) El anillo cociente $A/\mathcal{N}$ es un cuerpo.

1.49 Sea A un anillo conmutativo de integridad que es infinito. Supóngase que A no tiene más que un número finito de elementos inversibles.

(a) Demostrar que el radical de Jacobson de A es nulo.

(b) Mostrar que A tiene infinitos ideales maximales.

(c) Deducir de lo anterior la existencia de infinitos números primos.

1.50 Sea X un espacio compacto y A el anillo de las aplicaciones continuas definidas en X y con valores complejos. Comprobar que para todo elemento x de X el subconjunto $\mathfrak{m}_x$ de A definido por

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in A : \ f(x) = 0\}$$

es un ideal maximal de A. Demostrar que todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A coincide con alguno de los ideales $\mathfrak{m}_x$. [Indicación. Para un ideal maximal arbitrario $\mathfrak{m}$ de A considerar el subconjunto $Y = \{x \in X : \ f(x) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{m}\}$. Mostrar a continuación que $Y \neq \emptyset$ argumentando por reducción al absurdo y observando que en caso contrario se tendría la existencia una sucesión finita $x_1, \ldots, x_n$ de elementos de X y otra $f_1, \ldots, f_n$ de elementos de $\mathfrak{m}$, así como entornos abiertos $U_1, \ldots, U_n$, cada uno de ellos del correspondiente x_i, en el que f_i no se anula, y constituyendo ellos un recubrimiento de X. Considerar $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \bar{f}_i$ para obtener una contradicción. Mostrar que, si x está en Y, entonces $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$].

1.51 Sea F un cuerpo perfecto cuya característica es p. Sea $K = F^{p^{-\infty}}$ el cuerpo constituido por las raíces p^n-ésimas de elementos de F, recorriendo n todos los enteros ≥ 1. Demostrar que para todo entero $n \geq 1$ existe algún $x_n \in K$ tal que $x_n^{p^n} \in F$ y $x_n^{p^{n-1}} \notin F$. Sea $A = K \otimes_F K$ con la estructura de anillo obtenida definiendo el producto mediante la extensión por bilinealidad de las fórmulas

$$(\alpha \otimes \beta)(\gamma \otimes \delta) = (\alpha\gamma) \otimes (\beta\delta).$$

Demostrar que para el elemento $z_n = 1 \otimes x_n - x_n \otimes 1$ se tiene $z_n^{p^n} = 0$ y $z_n^{p^{n-1}} \neq 0$ y en consecuencia el nilradical de A no es un ideal nilpotente.

1.52 Sean A y B anillos y $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo.

(a) Comprobar que $f(\operatorname{Rad} A) \subset \operatorname{Rad} B$ y dar un ejemplo en el que la inclusión sea estricta.

(b) De un anillo A en el que hay sólo un número finito de ideales maximales distintos se dice que es un *anillo semilocal.* Demostrar que si A es semilocal se satisface la igualdad $f(\operatorname{Rad} A) = \operatorname{Rad} B$.

1.53 Sea A un anillo. Demostrar la equivalencia de cada una de las afirmaciones siguientes:

(a) Todo ideal primo de A es intersección de los ideales maximales que lo contienen.

(b) Todo ideal primo no maximal de A es intersección de los ideales primos que lo contienen estrictamente.

(c) En cada imagen homomórfica del anillo A coincide el radical de Jacobson con el nilradical.

Un anillo A para el que se satisfacen las condiciones anteriores se dice que es un *anillo de Jacobson.* Mostrar que anillos cocientes de anillos de Jacobson son de Jacobson. ¿Cuáles son los anillos locales de Jacobson? [Indicación. Para demostrar $b \Rightarrow a$ arguméntese por reducción al absurdo suponiendo la existencia de un ideal primo $\mathfrak{p}$ que no es intersección de ideales maximales. Elíjase $x \in \bigcap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m}$ con $x \notin \mathfrak{p}$. Considérese un ideal maximal en la familia de los ideales que contienen a $\mathfrak{p}$ que no cortan al conjunto de las potencias sucesivas de x, y lléguese a contradicción].