Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 12.
Anillos artinianos.
Teorema de Akizuki-Hopkins

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1]Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

12 Anillos artinianos. Teorema de Akizuki-Hopkins

12.1 Sea A un anillo noetheriano. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) A es artiniano;

(b) $\operatorname{Spec} A$ es finito y disceto;

(c) $\operatorname{Spec} A$ es discreto.

12.2 Sea B/A una extensión de anillos, con B finitamente generado como A-módulo. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo arbitrario del anillo A. Demostrar que los ideales primos $\mathfrak{q}$ de B para los que se satisface la igualdad $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ constituyen un conjunto finito.

12.3 Sea A un anillo noetheriano de dimensión de Krull cero y

$$0 = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s$$

una descomposición primaria reducida del ideal cero. Demostrar que se tiene

$$l(A) = \sum_{i=1}^{s} l(A/\mathfrak{q}_i).$$

12.4 Sea A un anillo noetheriano, $\mathfrak{a}$ un ideal y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A que contiene a $\mathfrak{a}$. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) $\mathfrak{p}$ es minimal respecto a la inclusión entre los ideales primos que contienen a $\mathfrak{a}$.

(b) $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ tiene un único ideal primo.

(c) $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ es artiniano.

(d) En el anillo $A_{\mathfrak{p}}$ se tiene $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}^n \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, para algún entero $n \geq 1$.

12.5 Demostrar que todo ideal del anillo A está generado por un idempotente si y sólo si A es un producto directo finito de cuerpos.

12.6 Comprobar que todo A-módulo es proyectivo si y sólo si el anillo A es un producto directo finito de cuerpos.

12.7 Sea A un anillo noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) M tiene longitud finita.

(b) Existe algún producto finito de ideales maximales que está contenido en el anulador de M.

(c) Todos los ideales primos que contienen a $\operatorname{Ann} M$ son maximales.

(d) El anillo $A/\operatorname{Ann} M$ es artiniano.

12.8 Sea A un anillo noetheriano. Demostrar que todo A-módulo finitamente generado tiene longitud finita si y sólo si A es artiniano.