Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 5.
Teorema del ascenso

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1]Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

5 Teorema del ascenso

5.1 Sea B/A una extensión entera de anillos. Comprobar que si B es un anillo local entonces A también lo es.

5.2 Sea F un cuerpo y A un subanillo del anillo de polinomios $F[X]$ que contiene estrictamente a F. Demostrar que la dimensión de Krull de A es uno.

5.3 Sea B/A una extensión entera de anillos y $\mathfrak{q}$ un ideal primo de B. Mostrar que $\operatorname{ht}\mathfrak{q} \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{q} \cap A)$.

5.4 Sea B/A una extensión entera de anillos. Comprobar que todo elemento de A inversible en B es también inversible en A. Demostrar que para los radicales de Jacobson se verifica la igualdad $\operatorname{Rad} A = A \cap \operatorname{Rad} B$.

5.5 Mostrar que extensiones enteras de anillos de Jacobson son de Jacobson.

5.6 Sea B/A una extensión entera de anillos e $i : A \longrightarrow B$ el correspondiente monomorfismo de inclusión. Demostrar que la aplicación inducida $\operatorname{Spec} i : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ es cerrada.

5.7 Sea A un anillo, G un grupo finito de automorfismos de A y A^G el subanillo de invariantes de dicho grupo. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A^G y $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ ideales primos de A tales que $\mathfrak{q} \cap A^G = \mathfrak{q}' \cap A^G = \mathfrak{p}$. Teniendo en cuenta que para todo $x \in \mathfrak{q}$ se verifica $\prod_{\sigma \in G} \sigma(x) \in \mathfrak{q} \cap A^G = \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}'$, comprobar que $\mathfrak{q} \subset \bigcup_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{q}')$ y deducir entonces la existencia de algún $\sigma \in G$ tal que $\sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}'$. Mostrar que el conjunto de los ideales primos de A cuya intersección con A^G es $\mathfrak{p}$ tiene cardinal finito.

5.8 Sea A un dominio de integridad íntegramente cerrado, F su cuerpo de cocientes y K/F una extensión de Galois finita cuyo grupo de Galois es G. Sea B la clausura entera de A en K y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Demostrar que el grupo G actúa transitivamente sobre el conjunto de los ideales primos $\mathfrak{q}$ de B que son primos y para los que se tiene la igualdad $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

5.9 Extender el ejercicio anterior al caso en que la extensión de Galois K/F es de grado arbitrario. [Indicación. Si $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{q}'$ son ideales primos de B tales que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}$, considerar el conjunto $\mathcal{T}$ formado por los pares (E, τ) donde E es un cuerpo intermedio que es extensión de Galois de F y τ es un F-automorfismo de E tal que $\tau(\mathfrak{q} \cap C) = \mathfrak{q}' \cap C$, para C la clausura íntegra de A en E. Mostrar que $\mathcal{T}$ tiene elementos maximales respecto a la extensión, y que si (M, μ) es maximal en $\mathcal{S}$, se tiene entonces $K = M$].

5.10 Sea A un dominio de integridad íntegramente cerrado, F su cuerpo de cocientes y K un cuerpo que es extensión de normal de F, cuyo grupo de Galois es G. Sea B la clausura entera de A en K y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Demostrar que el grupo G actúa transitivamente sobre el conjunto de los ideales primos $\mathfrak{q}$ de B para los que se tiene la igualdad $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. [Indicación. Considerar la clausura separable K_s de F en K y obtener, en el caso en que K/F sea puramente inseparable y p la característica de los cuerpos, que para todo ideal primo $\mathfrak{q}$ de B tal que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ se tiene que $\mathfrak{q}$ coincide con los elementos x de B para los que existe algún entero $m \geq 0$ tal que $x^{p^m} \in \mathfrak{p}$].

5.11 Sea A un dominio de integridad íntegramente cerrado, F su cuerpo de cocientes y K/F una extensión finita de cuerpos. Sea B la clusura íntegra de A en K y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Mostrar que existe sólo un conjunto finito de ideales primos $\mathfrak{q}$ de B para los que se tiene $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

5.12 Sea B/A una extensión entera de anillos, Ω un cuerpo algebraicamente cerrado y $f : A \longrightarrow \Omega$ un homomorfismo. Demostrar que f se puede extender a un homomorfismo $g : B \longrightarrow \Omega$. [Indicación. Usar el lema 5.3].