Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 7.
Condiciones de cadena

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1]Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

7 Condiciones de cadena

7.1 Sea $\{M_i\}_{i\in\mathcal{A}}$ una familia de A-módulos y $M = \bigoplus_{i\in\mathcal{A}} M_i$ un A-módulo noetheriano. ¿Qué puede decirse del conjunto $\mathcal{A}$ y de cada uno de los módulos de la familia?

7.2 Dar un ejemplo de un submódulo de un módulo de tipo finito que no sea de tipo finito.

7.3 Sea M un A-módulo y N_1 y N_2 submódulos de M. Comprobar que si M/N_1 y M/N_2 son noetherianos también lo es $M/N_1 \cap N_2$. Dar un resultado análogo para artinianos.

7.4 Sea B una A-álgebra y M un B-módulo. Comparar la B-noetherianidad y la A-noetherianidad de M. ¿ Qué puede decirse en el caso en que B sea noetheriano como A-módulo?

7.5 Sea A un dominio de integridad y K su cuerpo de cocientes. Un elemento x de K se dice *casi-entero* sobre A si existe algún $a \in A$, $a \neq 0$ tal que $ax^n \in A$ para todo $n > 0$. Mostrar que si x es entero sobre A es entonces casi-entero, y si A es noetheriano los elementos casi-enteros son también enteros.

7.6 Sea M un A-módulo noetheriano y $f : M \to M$ un endomorfismo de M. Comprobar que existe $k \geq 1$ tal que

$$\operatorname{Im} f^k \cap \ker f^k = 0.$$

Mostrar que si además f es suprayectiva entonces es un automorfismo de M. Demostrar que todo endomorfismo inyectivo de módulos artinianos es un automorfismo.

7.7 Sean M y N módulos sobre el anillo A. Supóngase que M es de generación finita y N noetheriano. Demostrar que $M \otimes N$ y $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ son noetherianos.

7.8 Sea B una A-álgebra y M un B-módulo de tipo finito. Si B es noetheriano como A-módulo, ¿es $B \otimes M$ un B-módulo noetheriano?

7.9 Sean M y N módulos finitamente generados sobre un anillo noetheriano A. Demostrar que para todo entero $n \geq 1$ los A-módulos $\operatorname{Tor}_n^A(M, N)$ y $\operatorname{Ext}_n^A(M, N)$ son noetherianos.

7.10 Sea A un anillo local cuyo ideal maximal $\mathfrak{m}$ es principal y tal que $\bigcap_{n>0} \mathfrak{m}^n = (0)$. Demostrar que A es entonces noetheriano y que cada ideal no nulo de A es una potencia de $\mathfrak{m}$.

7.11 Mostrar que la dimensión de Krull de un anillo noetheriano local en el que el ideal maximal es principal es menor o igual que 1. Utilizar esto para demostrar que los anillos noetherianos en los que cada ideal maximal es principal tienen dimensión de Krull menor o igual que 1.

7.12 Un A-módulo no nulo se dice *indescomponible* si no se puede escribir como suma directa de dos submódulos propios. Comprobar que todo A-módulo artiniano no nulo es suma directa finita de submódulos indescomponibles.

7.13 Sea A un anillo noetheriano y n un entero mayor o igual que 1. Demostrar que existe sólo un conjunto finito de ideales primos $\mathfrak{p}$ de A para los que se tiene $\operatorname{card} A/\mathfrak{p} \leq n$. [Indicación. Considerar primero el caso en que A es un dominio de integridad tal que para cualquier imagen homomórfica no isomórfica se satisface la tesis del enunciado. Argumentar por reducción al absurdo suponiendo que la afirmación del enunciado es falsa para un dominio noetheriano A de este tipo. Sean $x_1, \ldots, x_{n+1}$ elementos distintos de A. Considerar $y = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ y comprobar que si $\mathfrak{p}$ es ideal primo de A tal que $y \notin \mathfrak{p}$ entonces $A/\mathfrak{p}$ tiene más de n elementos, concluyendo que los primos para los que $\operatorname{card} A/\mathfrak{p} \leq n$ son un conjunto finito. Suponer ahora A noetheriano arbitrario y argumentar también por reducción al absurdo. Elegir un ideal $\mathfrak{q}$ de A que sea maximal en la familia de aquéllos en los que $A/\mathfrak{q}$ tiene infinitos ideales primos con cociente de cardinal menor o igual que n. Comprobar que $\mathfrak{q}$ es primo y reducir el caso general al previo].

7.14 Sea M un A-módulo. Supóngase que cada familia no vacía de submódulos de generación finita de M tiene un elemento maximal. Mostrar que M es noetheriano.

7.15 El producto de un número finito de anillos noetherianos, ¿es un anillo noetheriano?

7.16 Sea F un cuerpo, A el subanillo $F[X^2, X^3]$ del anillo de polinomios de $F[X]$. Usar las inclusiones $F[X^2] \subset A \subset F[X]$ para demostrar que A es noetheriano y que todo ideal primo no nulo de A es maximal.

7.17 Sea A un anillo y $A[[X]]$ el anillo de series formales en la indeterminada X y con coeficientes en A. Demostrar que si $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ es nilpotente entonces lo es también cada uno de los a_n. Comprobar que si el anillo A es noetheriano se verifica entonces el recíproco.

7.18 Dado un A-módulo M se denota por $\gamma(M)$ al mínimo de los cardinales de los posibles sistemas de generadores de M. Comprobar que si

$$0 \to M \to M' \to M'' \to 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos se tiene entonces

$$\gamma(M'') \leq \gamma(M') \leq \gamma(M) + \gamma(M'').$$

En particular, si M y M'' son de generación finita también lo es M'. ¿Qué puede decirse en el caso en que el anillo A sea noetheriano?

7.19 Sea A un anillo noetheriano y $\mathfrak{p}$ un ideal primo que está estrictamente contenido en un ideal principal. Demostrar que $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 0$.

7.20 Sea Σ un espacio topológico. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(a) Los abiertos de Σ cumplen la condición de cadena ascendente.

(b) Para los abiertos de Σ se satisface la condición maximal.

(c) Los cerrados de Σ satisfacen la condición de cadena descendente.

(d) Para los cerrados de Σ se cumple la condición minimal.

Un espacio topológico se dice *noetheriano* si se satisfacen las condiciones equivalentes anteriores. Pruébese que los subespacios de un espacio noetheriano son noetherianos y casi-compactos.

7.21 Sea Σ un espacio topológico. Comprobar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) Σ es noetheriano.

(b) Cada subespacio abierto de Σ es noetheriano.

(c) Cada subespacio de Σ es noetheriano.

7.22 Mostrar que un espacio noetheriano es unión finita de subespacios cerrados irreducibles. Comprobar que el conjunto de las componentes irreducibles de un espacio noetheriano es finito.

7.23 Demostrar que $\operatorname{Spec} A$ es un espacio noetheriano para cualquier anillo noetheriano A. Comprobar que el conjunto de los ideales primos minimales de A es finito y que para todo ideal $\mathfrak{a}$ de A se tiene $r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$, donde $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ son los ideales primos de A que son minimales en la familia de los ideales primos de A que contienen a $\mathfrak{a}$.

7.24 (a) Usar el ejercicio anterior para mostrar que todo ideal de un anillo noetheriano está contenido únicamente en un conjunto finito de ideales primos que son minimales respecto a la inclusión entre los ideales primos con dicha propiedad.

(b) (E. Noether) Demostrar el mismo resultado de (a) argumentando por reducción al absurdo y considerando un ideal $\mathfrak{a}$ que es maximal entre los ideales de A que no gozan de la propiedad enunciada.

7.25 Sea $A \neq 0$ un anillo noetheriano con nilradical nulo. Comprobar que el conjunto de los divisores de cero de A coincide con la unión de sus ideales primos minimales.

7.26 Sea B/A una extensión entera de anillos y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Demostrar que si B es noetheriano hay únicamente un número finito de ideales primos $\mathfrak{q}$ de B tales que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

7.27 Sea A un anillo noetheriano. Demostrar que A es un producto directo finito de dominios de integridad si y sólo si $A_{\mathfrak{m}}$ es dominio de integridad para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A. [Indicación. En el caso en que todos los $A_{\mathfrak{m}}$ son dominios de integridad, compruébese que un ideal maximal arbitrario no puede contener simultáneamente a dos ideales primos minimales].

7.28 Sea A un anillo noetheriano. Demostrar que A es un producto directo finito de cuerpos si y sólo si $A_{\mathfrak{m}}$ es un cuerpo para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

7.29 Sea A un anillo en el que todo elemento no nulo está contenido en un número finito de ideales maximales y tal que $A_{\mathfrak{m}}$ es noetheriano para cada $\mathfrak{m} \in \operatorname{Máx} A$. Demostrar que A es noetheriano. [Indicación. Si $\mathfrak{a}$ es ideal no nulo de A, elíjase $x_0 \in \mathfrak{a}$ con $x_0 \neq 0$. Sean $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ los ideales maximales que contienen a $\mathfrak{a}$, y $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_{r+s}$ los ideales maximales que contienen a x_0. Para $j = 1, \ldots, s$ tomar $x_j \in \mathfrak{a}$ con $x_j \notin \mathfrak{m}_{r+j}$. Elíjanse $x_{s+1}, \ldots, x_t$ de manera que sus imágenes en cada $A_{\mathfrak{m}_i}$ generan a la correspondiente extensión del ideal $\mathfrak{a}$. Mostrar que $\mathfrak{a}$ está generado por el conjunto $\{x_0, \ldots, x_t\}$].

7.30 Sean $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ ideales del anillo A tales que $\mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n = 0$. Mostrar que si cada $A/\mathfrak{a}_i$ es un anillo noetheriano entonces también lo es A.

7.31 Sean A y B anillos noetherianos, $f : A \to C$ y $g : B \to C$ epimorfismos de anillos y E su producto fibrado (subanillo de $A \times B$ definido por la igualdad $E = \{(x, y) \in A \times B : f(x) = g(x)\}$). Comprobar que E es un anillo noetheriano.

7.32 Sea A un anillo y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Demostrar que si $x \in A$ es tal que los ideales $\mathfrak{a} + xA$ y $\mathfrak{a}_x = \{y \in A : yx \in A\}$ son de tipo finito entonces también lo es el ideal $\mathfrak{a}$. Comprobar que si A no es noetheriano entonces el conjunto $\mathcal{S}$ de los ideales de A que no son de tipo finito tiene elementos maximales respecto a la inclusión y que éstos son ideales primos de A. Concluir mostrando que un anillo A es noetheriano si y sólo si cada uno de sus ideales primos está finitamente generado.

7.33 Sea M un A-módulo, $M^\star$ su dual y $M^{\star\star}$ su bidual. Sea $j_M : M \longrightarrow M^{\star\star}$ la aplicación canónica que a cada x de M le asocia la aplicación $j_M(x)$ que actúa sobre cada $\varphi \in M^\star$ transformándolo en $\varphi(x)$. Se dice que M es *reflexivo* si j_M es un isomorfismo. Demostrar que si A es un dominio de integridad noetheriano y M de generación finita entonces la reflexividad de M es equivalente con la reflexividad de cada uno de los $A_{\mathfrak{m}}$-módulos $M_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} \in \operatorname{Máx} A$).

7.34 Sea A un anillo, M un A-módulo. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) El A-módulo M es noetheriano.

(b) El A-módulo M es de tipo finito y el anillo $A/\operatorname{Ann}(M)$ es noetheriano.

7.35 Sea A un anillo. Un A-módulo M se dice *fiel* si $\operatorname{Ann}(M) = 0$. Demostrar que si existe un A-módulo no nulo noetheriano y fiel entonces A es noetheriano.

7.36 Determinar todos los anillos de Boole noetherianos.

7.37 Sea $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de A-módulos tal que $I = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} I_\alpha$ es un A-módulo inyectivo. Comprobar que lo es cada uno de los I_α. Mostrar que si A es noetheriano entonces sumas directas de familias arbitrarias de A-módulos inyectivos son módulos inyectivos.

7.38 (H. Bass) Demostrar que un anillo A es noetheriano si y sólo si sumas directas de familias arbitrarias de A-módulos inyectivos son módulos inyectivos. [Indicación: Supóngase que sumas directas de módulos inyectivos son inyectivos. Considérese $\mathfrak{a}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_n \subset \ldots$ una sucesión creciente de ideales de A. Para cada n sea I_n un A-módulo inyectivo que contiene a $A/\mathfrak{a}_n$ y hágase $I = \bigoplus I_n$ y $\mathfrak{a} = \bigoplus \mathfrak{a}_n$. Sea $f_n : \mathfrak{a} \to I_n$ la composición de la proyección $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_n$ con la inyección $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_n \to I_n$. Definir $f : \mathfrak{a} \to I$ por $f(x) = (f_n(x))$. Aplicar el carácter inyectivo de I para mostrar la existencia de un n para el que se tiene $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} \ldots$].

7.39 Sea A un anillo noetheriano y S un subconjunto multiplicativo de A. Demostrar que existe algún $z \in S$ tal que el homomorfismo $A_z \longrightarrow S^{-1}A$, definido como en el ejercicio 4.46, es un monomorfismo.