Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 16.
Extensiones cíclicas.

1 de junio de 2014.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

16. Extensiones cíclicas

16.1 Suponer n, F, x y K como en el lema 2.6.1. Demostrar que $[K : F]$ coincide con el menor entero positivo d para el que se tiene $x^d \in F$.

16.2 Dado un primo positivo p, demostrar que el cuerpo de descomposición K de $X^n - p$ sobre $\mathbb{Q}$ es tal que $[K : \mathbb{Q}] = n\varphi(n)$ ó $n\varphi(n)/2$. (Indicación. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n = p$. Usar los ejercicios 1.6. 13, 2.2. 9 y 2.6. 1 para demostrar que si $d = [K : \mathbb{Q}(\varepsilon)]$ entonces $d|n$ y $x^{2d} \in \mathbb{Q}$).

16.3 Demostrar que los números racionales a y b satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = 1$ si y sólo si existen c, $d \in \mathbb{Q}$ tales que

$$a = \frac{c^2 - d^2}{c^2 + d^2}, \qquad b = \frac{2dc}{c^2 + d^2}$$

16.4 Demostrar que el elemento y del teorema 90 de Hilbert (forma multiplicativa) está determinado de modo único salvo un factor no nulo del cuerpo base.

16.5 Sea K/F una extensión de Galois tal que $K = F(x)$, con $x^n \in F$ para algún entero $n > 0$. Sea G su grupo de Galois. Mostrar que el grupo derivado G' es cíclico y que, en el caso que n sea primo, también el grupo G es cíclico.

16.6 Sea K/F una extensión de Galois abeliana, cuyo grupo de Galois G tiene n elementos. Supóngase que F contiene alguna raíz n-ésima primitiva de la unidad. Demostrar que K es cuerpo de descomposición sobre F de un polinomio del tipo

$$(X^{n_1} - a_1)(X^{n_2} - a_2) \cdots (X^{n_s} - a_s).$$

16.7 Sea F un cuerpo finito con 1.024 elementos y K un cuerpo que es extensión cuadrática de F. Mostrar la existencia de un único automorfismo $\sigma \neq \mathrm{Id}$ de K que fija a cada elemento de F. ¿Para cuántos elementos x de $K^\star$ se satisface la igualdad $\sigma(x) = x^{-1}$.

16.8 Usar el ejercicio XX para demostrar la forma multiplicativa del teorema 90 de Hilbert.

16.9 (Teorema 90 de Hilbert. Forma aditiva). Sean F y K cuerpos, K una extensión de Galois cíclica de orden n del cuerpo F y τ un generador de G. Demostrar que para un elemento a de K se tiene que $(a) = 0$ si y sólo si existe algún $b \in K$ tal que

$$a = b - \tau(b).$$