Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 12.
Extensiones ciclotómicas.

31 de mayo de 2014.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

12. Extensiones ciclotómicas

12.1 Sea $p > 1$ un número primo y a un racional tal que el polinomio $X^p - a$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Demostrar que el grupo de Galois de $X^p - a$ sobre $\mathbb{Q}$ es isomorfo al grupo de las afinidades de la recta vectorial $\mathbb{Z}/(p)$.

12.2 Sea ε una raíz primitiva n-ésima de la unidad. Determinar los valores de n para los que $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ es una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$.

12.3 Sea K una extensión finita del cuerpo $\mathbb{Q}$. Demostrar que K contiene únicamente un número finito de raíces de la unidad.

12.4 Sea F un cuerpo de característica distinta de 2 y n un entero impar ≥ 1. Supóngase que ε es una raíz n-ésima primitiva de la unidad y η es una raíz $2n$-ésima primitiva de la unidad. Demostrar que $F(\varepsilon) = F(\eta)$.

12.5 Sea p un primo positivo distinto de 2, ϵ una raíz p-ésima primitiva de la unidad y $K = \mathbb{Q}(\varepsilon)$. Demostrar que en la extensión $K/\mathbb{Q}$ existen un único cuerpo intermedio que es extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$ y que dicho cuerpo es real o no según que p sea de la forma $4n + 1$ ó $4n + 3$.

12.6 Sea ε (resp. η) un número complejo que es raíz n-éima (resp. m-ésima) primitiva de la unidad. Supóngase que n y m son primos relativos. Demostrar que $\mathbb{Q}(\varepsilon) \cap \mathbb{Q}(\eta) = \mathbb{Q}$.

12.7 Sea $\varepsilon \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva n-ésima de la unidad. Suponer que m es un entero positivo primo relativo con n. Demostrar que el polinomio $\Phi_m(X)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

12.8 Sean p y k enteros estrictamente positivos con p primo y F un cuerpo de característica distinta de p. Mostrar que las raíces primitivas de la unidad de orden p^k de una clausura algebraica $\bar{F}$ de F coinciden con las raíces del polinomio $X^{p^k} - 1$ en $\bar{F}$ que no son raíces p^{k-1}-ésimas de la unidad. Demostrar que el polinomio

$$X^{(p-1)p^{k-1}} + X^{(p-2)p^{k-1}} + \cdots + X^{p^{k-1}} + 1$$

es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

12.9 Sea $\varepsilon \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva n-ésima de la unidad, $m \geq 1$ un entero positivo y $y \in \mathbb{Q}(\varepsilon) \cap \mathbb{R}$ tal que $y^m \in \mathbb{Q}$. Demostrar que $y^2 \in \mathbb{Q}$.