Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 5.
Cuerpos de descomposición. Clausura algebraica.

9 de diciembre de 2009.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

5. Cuerpos de descomposición. Clausura algebraica

5.1 Sea x una raíz del polinomio X^2+X+1 de $\mathbb{Z}/(2)[X]$. Dar las tablas de sumar y multiplicar del cuerpo $[\mathbb{Z}/(2)](x)$.

5.2 Sea x una raíz del polinomio $f(X)=X^3-2$ de $\mathbb{Q}[X]$. ¿Es $\mathbb{Q}(x)$ cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre $\mathbb{Q}$?

5.3 Dar el cuerpo de descomposición de X^6+1 sobre $\mathbb{Z}/(2)$.

5.4 Mostrar que cualquier extensión algebraica de un cuerpo F puede sumergirse en la clausura algebraica de dicho cuerpo, y que cualquier extensión algebraica de F con la propiedad de contener alguna copia de todas las extensiones algebraicas de este cuerpo coincide, salvo F-isomorfismos, con la clausura algebraica de F.

5.5 Sea K/F una extensión algebraica. Mostrar que para todo polinomio $f(X)$ de $K[X]$ existe siempre algún polinimio no nulo $h\in K[X]$ tal que $fh\in F[X]$.

5.6 Sea f un polinomio de grado n del anillo de polinomios $F[X]$ y K el cuerpo de descomposición de f sobre F. Demostrar que $[K:F]$ divide a $n!$

5.7 Sea K/F una extensión finita de cuerpos cuyo grado n es primo con el grado del polinomio $f(X)\in F[X]$. Demostrar que si f es irreducible sobre F lo es también sobre K.

5.8 Sea K/F una extensión cuadrática y $f\in F[X]$ un polinomio irreducible de grado 6. Comprobar que f es irreducible en $K[X]$ o se descompone en dicho anillo de polinomios como producto de dos polinomios irreducibles de grado 3.

5.9 Sea K el cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ de un polinomio de grado 8 que es reducible sobre $\mathbb{Q}$, pero que no admite raíces en $\mathbb{Q}$. Demostrar que $[K:\mathbb{Q}]\leq 1440$.

5.10 Sea p un primo positivo y K el cuerpo de descomposición del polinomio X^p-2 sobre $\mathbb{Q}$. Calcular $[K:\mathbb{Q}]$.

5.11 Sea F un cuerpo de característica 2, K un cuerpo que es extensión cuadrática de F. Demostrar que existe algún $a\in F$ de modo que K es cuerpo de descomposición sobre F de algún polinomio irreducible que es del tipo X^2-a o del tipo X^2-X-a.

5.12 Sea F un cuerpo de característica distinta de 2 y a,b elementos distintos de F. Sea K el cuerpo de descomposición sobre F del polinomio $X^4-(a+b)X^2+ab$. Demostrar que $[K:F]=4$ si y sólo si a,b y ab no son cuadrados en F.

5.13 Sea K/F una extensión algebraica de cuerpos. Demostrar que K es algebraicamente cerrado si y sólo si todo polinomio no constante de $F[X]$ tiene todas sus raíces en K.

5.14 Sea F un cuerpo de característica p, con p primo positivo. Considérese el polinomio $f(X)=X^p-X-a$ de $F[X]$. Comprobar que si f tiene alguna raíz en el cuerpo F entonces las tiene todas. Suponer ahora f sin ninguna raíz en F. Demostrar la irreducilidad de f en $F[X]$ suponiendo la existencia de una factorización $f(X)=g(X)h(X)$ con $r=\deg g<p$, siendo $r\geq 1$, y llegando a una contradicción tras estudiar el coeficiente de X^{r-1} en g. Si x es un número complejo raíz del polinomio X^p-X-a y a es un entero tal que $a\not\equiv 0(\text{mód}\, p)$, demuéstrese que $[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}]=p$.

5.15 Sea $f(X)=X^p-X-a$ un polinomio con coeficientes en un cuerpo F de característica el número primo p. Supóngase K una extensión del cuerpo F y $x\in K$ una raíz de $f(X)$ tal que $x\notin F$. Si $y\in K$ es una raíz del polinomio X^p-X-ax^{p-1}, determínese el grado de la extensión $F(x,y)/F$.

5.16 Sea p un primo positivo. Demostrar que el cuerpo de descomposición de X^p-1 sobre cualquier cuerpo F tiene un grado que divide a $p-1$.

5.17 Sea p un primo positivo y F un cuerpo de característica p. Mostrar que el polinomio X^p-a de $F[X]$ es, o bien, irreducible sobre F, o bien, la potencia de un polinomio lineal de $F[X]$.

5.18 Sea F un cuerpo, m y n enteros positivos primos relativos. Demostrar que el polinomio $X^{mn}-a$ de $F[X]$ es irreducible si y sólo si los polinomios X^m-a y X^n-a lo son.

5.19 Sea F un cuerpo y $f(X)\in F[X]$ un polinomio de grado n estrictamente mayor que 1. Comprobar que f es irreducible si y sólo si f no tiene raíces en ningún cuerpo K extensión de F tal que $[K:F]\leq n/2$.

5.20 Mostrar que un anillo es dominio de integridad si y sólo si puede sumergirse en un cuerpo algebraicamente cerrado.

5.21 (E. Artin). Sea F un cuerpo y S el conjunto de todos los polinomios mónicos e irreducibles de $F[X]$. Sea $A = F[X_s]_{s\in S}$. Demostrar que el ideal de A generado por el conjunto $\{f(X_f) : \ f \in F\}$ es distinto de A. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de A que contiene al ideal anterior. Demostrar que $F_1 = A/\mathfrak{m}$ es una extensión de un cuerpo F_0 isomorfo a F en la que todo polinomio no constante de $F_0[X]$ tiene alguna raíz y mostrar a partir de aquí la existencia de alguna clausura algebraica del cuerpo F.

5.22 Sea F un cuerpo y S un conjunto que contiene a F tal que $\mathrm{card}(S) > \aleph_0 \,\mathrm{card}(F)$. Sea $\mathcal{S}$ la familia de las extensiones algebraicas de F que están contenidas en el conjunto S. Ordenar $\mathcal{S}$ con respecto a la extensión, y demostrando que en $\mathcal{S}$ hay elementos maximales, pruébese que todo cuerpo posee una clausura algebraica.

5.23 Sea F un cuerpo. Identificar el conjunto subyacente a F con el subconjunto de $F[X]\times\mathbb{N}$ formado por los elementos $(X-a, 0),\ a \in F$. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de las extensiones K de esta copia de F cuyo conjunto subyacente está contenido en $F[X]\times\mathbb{N}$ y que gozan de la siguiente propiedad: si $(f, n) \in K$ entonces (f, n) es una raíz del polinomio identificado a f. Ordenar parcialmente $\mathcal{S}$ respecto a la relación de extensión, demostrar que existen elementos maximales y que éstos se pueden identificar con clausuras algebraicas de F.

5.24 Sea F un cuerpo de cardinal infinito no numerable y F_0 su cuerpo primo. Para todo subconjunto finito α de F, denótese por S_α a la familia de los subconjuntos finitos de F que contienen a α. Mostrar que la familia $\mathcal{T}$ de los subconjuntos S_α tiene la propiedad de las intersecciones finitas. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{T}$. Mostrar, sin hacer uso del teorema de Steinitz, que cada uno de los cuerpos $F_0(\alpha)$ admite una clausura algebraica $\overline{F_0(\alpha)}$. Considerando el ultraproducto $\prod_\alpha \overline{F_0(\alpha)}/\mathcal{U}$, demostrar que F tiene una clausura algebraica.