Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 3.
Extensiones finitas y algebraicas.

18 de octubre de 2010.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

3. Extensiones finitas y algebraicas

3.1 ¿Es posible construir con regla y compás un triángulo isósceles con vértices en la circunferencia unidad y de superficie unidad?

3.2 ¿Puede construirse con regla y compás el eneágono regular?

3.3 Demostrar que el ángulo θ puede construirse con regla y compás si y sólo si el polinomio

$$4X^3 - 3X - \cos\theta$$

es reducible sobre $\mathbb{Q}(\cos\theta)$.

3.4 Sean n y m enteros positivos primos relativos. Mostrar que, si los polígonos regulares de n y m lados son construibles con regla y compás, entonces el polígono regular de nm lados es también construible con regla y compás.

3.5 Suponer n y m enteros positivos tales que $m \mid n$. Mostrar que si el polígono regular de n lados es construible con regla y compás, entonces también lo es el de m lados.

3.6 Mostrar que, para todo entero $n \geq 2$, el polígono regular de 2^n lados es construible con regla y compás y dar explícitamente la longitud del lado de dichos polígonos cuando se consideran inscritos en la circunferencia unidad. Demostrar que

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

3.7 ¿Puede construirse con regla y compás el pentágono regular? Describir una construcción de este tipo.

3.8 ¿Puede trisecarse con regla y compás el ángulo $2\pi/5$?

3.9 Comprobar que el ángulo θ no puede ser trisecado con regla y compás en los casos en que $\cos\theta$ sea un número real trascendente.

3.10 Mostar que en el caso en que $\cos\theta = 5/6$ el ángulo θ no puede dividirse en cinco partes iguales con regla y compás.

3.11 ¿Cuál es el menor entero estrictamente positivo n para el que el ángulo de n grados puede ser construido con regla y compás?

3.12 Caracterizar los enteros n para los que el ángulo de n grados es construible con regla y compás.

3.13 Mostrar que para el ángulo de 3 grados se satisface la igualdad

$$\cos 3^0 = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{16}(\sqrt{6}-2)(\sqrt{5}-1).$$

Dar explícitamente una cadena de subcuerpos como la del teorema de Wantzel que permita garactizar la constructibilidad con regla y compás del punto $(\cos 3^0, \cos 3^0)$.

3.14 Tómese un cuadrado $OABC$. Supóngase que el lado OB se mueve uniformemente girando alrededor de O y que durante el mismo intervalo de tiempo BC se traslada paralelamente a sí mismo con movimiento uniforme hasta hacer coincidir los segmentos OB y BC con OA. La intersección de los dos segmentos móviles determina en cada instante un punto M. El lugar geomético de los puntos M constituye una curva a la que se denomina *cuadratriz de Hipias*. Dar la ecuación en coordenadas polares y en coordenadas cartesianas de dicha curva.

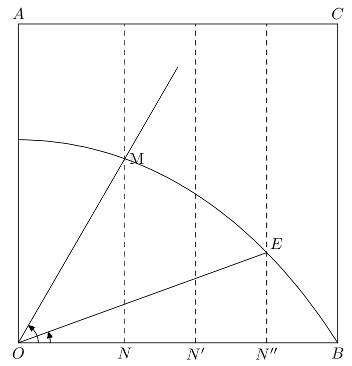

Figura 1: Trisección con cuadratriz

Supóngase dado un ángulo agudo en el que uno de sus lados se hace coincidir con OB y el otro corta al cuadrado $OABC$. Sea M el punto de intersección del último de los lados del ángulo con la cuadratriz, N la proyección ortogonal del punto M sobre el segmento OB y N'' el punto del segmento OB tal que $N''B = \frac{1}{3}NB$. Comprobar que la paralela a OA trazada desde N'' corta a la cuadratriz en un punto E tal que BOE es el ángulo tercio del ángulo dado. Comprobar que, si el cuadrado OABC tiene lado unidad, entonces el punto Q_0 de intersección de la cuadratriz con el segmento OA es tal que el segmento OQ_0 es de longitud $\frac{2}{\pi}$, con lo que con auxilio de la cuadratriz puede construirse un cuadrado de igual área que el círculo unidad.

3.15 En la proposición 8 del *Libro de los Lemas,* Arquímedes da la siguiente construcción para trisecar ángulos: Sea $\widehat{ABC}$ un ángulo agudo que se desea trisecar. Con centro en B y radio arbitrario se traza una circunferencia $\mathcal{C}$, la cual corta a la semirrecta BC en el punto Q. Sea R el otro punto de intersección de la recta BC con la circunferencia y P el punto de intersección de la semirrecta BA con $\mathcal{C}$. Trazar una recta que pase por P, que corte a $\mathcal{C}$ en un punto T y a la semirrecta BR en un punto S, de modo que los segmentos ST y TB sean de igual longitud. Justifíquese cada una de las afirmaciones siguientes:

a) $\widehat{BST}$ es el ángulo tercio de $\widehat{ABC}$.

b) La construcción precedente no es una construcción con regla y compás.

c) Es posible trisecar cualquier ángulo con compás y una regla en la que se hayan marcado dos puntos que determinan un segmento de longitud unidad.

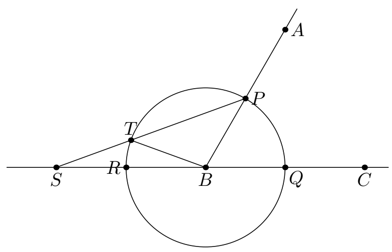

Figura 2: Construcción del Libro de los Lemas

3.16 (J: H. Conway) Sea k un número real estrictamente comprendido entre 0 y 1. Supóngase dado un sitema de referencia ortogonal en el plano eucídeo con origen en el punto O. Con radio unidad y haciendo centro en el punto $A = (k, 0)$ se traza una circunferenica cuya intersección con el semieje de positivo de ordenadas es un punto B. Construir el punto P del semieje negativo de ordenadas tal que $OP = \frac{1}{3}OB$. Determinar el punto C sobre la recta PA, y el punto D en la intersección de las rectas BC y OA, de manera que $CD = 1$. Demostrar que $AD = 2\sqrt[3]{k}$. Mostrar que es posible construir el punto D con compás y una regla en la que se han hecho dos marcas, pero que hay valores de k para los que dicho punto no puede construirse con regla y compás.

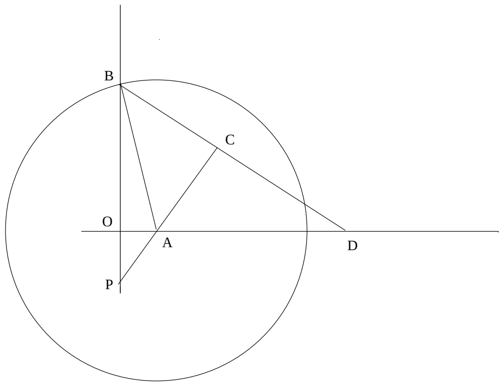

Figura 3: Construcción de segmento de longitud $2\sqrt[3]{k}$

3.17 Se define la *espiral de Arquímedes* como el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve uniformemente sobre una semirrecta partiendo de su origen mientras ésta gira uniformemente en torno a dicho punto.

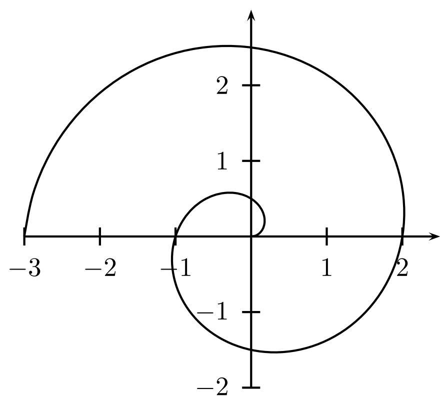

Figura 4: Espiral de Arquímedes

¿De qué modo puede utilizarse la espiral de Arquímedes para trisecar ángulos?

3.18 (Descartes). Supóngase dados un segmento de longitud q y una parábola Γ de vértice A, foco C y parámetro unidad. Trazar una perpendicular al eje de la parábola que pase por su foco. Determinar sobre esta recta un punto E cuya distancia al foco es $\frac{1}{2}q$ y trazar con centro en E y radio EA una circunferencia. Si $F \neq A$ es punto de intersección de Γ con la circunferencia y si L es su proyección sobre el eje de Γ, pruébese que FL y LA son dos medias proporcionales entre segmentos de longitudes 1 y q.

3.19 Sea $\mathcal{A}$, S y K_0 como en el teorema de Wantzel. Un número real se dirá $\mathcal{A}$-*construible* si es alguna de las coordenadas de un punto construible con regla y compás a partir de $\mathcal{A}$. Comprobar que el conjunto de los números $\mathcal{A}$-constuibles C constituye un subcuerpo de $\mathbb{R}$ que contiene a K_0 y con la propiedad de que $c \in C$ y $c > 0$ implican $\pm\sqrt{c} \in C$. Comprobar que C es el menor subcuerpo de $\mathbb{R}$ que contiene a K_0 y que goza de dicha propiedad.

3.20 Sea $p \geq 3$ un número primo. Demostrar que, si el polígono regular de p lados es construible con regla y compás, entonces $p = 2^r + 1$, para algún entero $r \geq 1$.

3.21 Sea $r \geq 0$ un entero y $p = 2^r + 1$ un primo positivo. Comprobar que p se escribe en la forma $2^{2^n} + 1$ para cierto entero $n \geq 1$ Mostrar que si $p \geq 3$ y el polígono regular de p lados es constuible con regla y compás entonces $p = 2^{2^n} + 1$ para algún entero $n \geq 1$. [A los números $F_n = 2^{2^n} + 1$ se llama *números de Fermat*. P. Fermat conjeturó que todos ellos debían ser primos. Euler mostró que esto no ocurre en el caso de F_5. A día de hoy los únicos números de Fermat que se sabe que son primos son F_0, F_1, F_2, F_3 y F_4].

3.22 Demostrar que el heptágono regular no es construible con regla y compás. ¿Cómo puede utilizarse el teorema de Wantzel para caracterizar este hecho?

3.23 Sea θ un ángulo arbitrario y $f(X)$ el polinomio de $\mathbb{R}[X]$ definido por la igualdad siguiente:

$$f(X) = 4X^3 - 3X - \cos\theta.$$

Determinar todas las raíces de $f(X)$.

3.24 Dados un punto P y un subconjunto $\mathcal{A}$ del plano euclídeo, se define la *constructibilidad con regla, compás y trisector de ángulos* de P a partir de $\mathcal{A}$ de modo semejante a como se definió la constructibilidad con regla y compás sin más que añadir entre las posibilidades de constructibilidad atómica el que P pueda también ser punto de intersección de una recta r que triseca algún ángulo subtendido por dos semirrectas, cada una de las cuales pasa por dos puntos distintos de $\mathcal{A}$, con alguna de las figuras geométricas siguientes: (i) una circunferencia que tiene su centro en un punto de $\mathcal{A}$ y cuyo radio es la distancia existente entre dos puntos de $\mathcal{A}$, (ii) una recta que pasa por dos puntos distintos de $\mathcal{A}$ y que es distinta de r, (iii) una recta distinta de r que triseca algún ángulo subtendido por semirrectas distintas, cada una de las cuales pasa por dos puntos distintos de $\mathcal{A}$. Sea S el conjunto de coordenadas de puntos de $\mathcal{A}$ y $K_0 = \mathbb{Q}(S)$. Supóngase que x es algún número complejo raíz del polinomio $f(X) = X^3 - pX + q$ de coeficientes en K_0. Demostrar que si $p > 0$ y $|q\sqrt{27/p^3}| < 2$ entonces x es real y el punto $(x, 0)$ es construible con regla, compás y trisector de ángulos a partir de $\mathcal{A}$.

3.25 Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto de puntos del plano euclídeo, S el subconjunto de las coordenadas de los puntos de $\mathcal{A}$. Hágase $K_0 = \mathbb{Q}(S)$. Demostrar que el punto $P = (x, y)$ es construible con regla, compás y trisector de ángulos a partir de $\mathcal{A}$ si y sólo si existe una cadena de subcuerpos de $\mathbb{R}$

$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n,$$

eventualmente reducida a K_0 y para la que se satisfacen las dos condiciones dadas a continuación:

a) Cada K_i es una extensión cuadrática de K_{i-1} o una extensión cúbica del tipo $K_i = K_{i-1}(u_i)$ donde u_i es raíz de un polinomio $f_i(X) = X^3 - p_iX + q_i$ con coeficientes en K_{i-1} y tal que $p_i > 0$, $|q_i\sqrt{27/p_i^3}| < 2$.

b) $x, y \in K_n$.

3.26 Probar la constructibilidad con regla, compás y trisector de ángulos del polígono regular de 7 lados.

3.27 ¿Pueden resolverse los problemas de la cuadratura del círculo y de la duplicación del cubo con la ayuda adicional de un trisector de ángulos?