Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 6.
Teorema del descenso

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1]Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

6 Teorema del descenso

6.1 Sea B un dominio de integridad y B/A una extensión entera de anillos. Supóngase A íntegramente cerrado. Mostrar que para todo ideal primo $\mathfrak{q}$ de B se tiene $\mathrm{ht}\,\mathfrak{q} = \mathrm{ht}\,(\mathfrak{q} \cap A)$.

6.2 Sea $A = \mathbb{Z}[X]$ y $\mathfrak{a}$ el ideal generado por $2X$ y $X^2 - X$. Mostrar que el anillo $B = A/\mathfrak{a}$ es entero sobre $\mathbb{Z}$. Sea $\mathfrak{b} = 2A + (X-1)A$ y $\mathfrak{q} = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$. Probar que $\mathfrak{q}$ es un ideal maximal de B tal que $\mathrm{ht}\,\mathfrak{q} = 0$ y $\mathrm{ht}\,(\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z}) = 1$.

6.3 Sean A y B dominios de integridad con A íntegramente cerrado. Supóngase que B es extensión entera del anillo A. Sean $\mathfrak{p}_0$ y $\mathfrak{p}_1$ ideales primos de A tales que $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1$, y $\mathfrak{q}_1$ un ideal primo de B tal que $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$. Sean F y K los cuerpos de cocientes de A y B, y L una extensión de K tal que L/F es normal. Sea C la clausura íntegra de A en L. Considerar ideales primos $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_0$ y $\mathfrak{r}_1'$ de C tales que $\mathfrak{r}_0 \subset \mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_0 \cap A = \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{r}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{r}_1' \cap B = \mathfrak{q}_1$. Usar el ejercicio 5.10 para construir un ideal primo $\mathfrak{r}_0'$ tal que $\mathfrak{r}_0' \subset \mathfrak{r}_1'$ y de modo que $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{r}_0' \cap B$ sea un ideal primo de B para el que se tiene la igualdad $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}_0 \cap A$. Obtener de aquí otra demostración del teorema del descenso.

6.4 Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Se dice que B tiene la *propiedad del descenso* si la tesis del teorema del descenso se satisface para B y su subsnillo $f(A)$. Demostrar que si la A-álgebra B es plana entonces f tiene la propiedad del descenso. [Indicación. Sean $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}'$ ideales primos de A tales que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$. Sea $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}\,B$ tal que $f^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$ y $\hat{f} : A_{\mathfrak{p}'} \longrightarrow B_{\mathfrak{q}'}$ el homomorfismo inducido por f. Usar la suprayectividad de $\mathrm{Spec}\,\hat{f}$ para encontrar $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\,B$ tal que $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.]

6.5 Sean A y B dominios de integridad, con B/A extensión entera de anillos y A íntegramente cerrado. Sea x un elemento arbitrario de B y $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio mónico con coeficientes en A que admite a x por raíz y que es de grado minimal entre los polinomios mónicos de $A[X]$ con dicha propiedad. Sea $i : A \longrightarrow B$ el monomorfismo de inclusión. Demostrar que el abierto básico respecto a la toplogía de Zariski O_x se transforma por $\mathrm{Spec}\,i$ en el conjunto $\bigcup_{i=0}^{n-1} O_{a_i}$ y que, en particular, la aplicación $\mathrm{Spec}\,i$ es abierta. [Indicación. Para comprobar la inclusión $\bigcup_{i=0}^{n-1} O_{a_i} \subset O_x$ considerar el A-módulo libre $C = A[x]$, y comiéncese razonando por reducción al absurdo para demostrar que $x \notin \mathrm{r}(\mathfrak{p}C)$, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ que esté en $\bigcup_{i=0}^{n-1} O_{a_i}$. Sea $\mathfrak{r}' \in \mathrm{Spec}\,C$ con $x \notin \mathfrak{r}'$ tal que $\mathfrak{p}C \subset \mathfrak{r}'$. Usar entonces el ejercicio anterior para garantizar la existencia de algún ideal primo $\mathfrak{r}$ de C tal que $\mathfrak{r} \cap A = \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{r}'$ y concluir].