Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 2.
Espectro de un anillo

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1] Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

2 Espectro de un anillo

2.1 Mostrar que en un anillo absolutamente plano A se tiene que $\mathcal{F}(A(x+y)) = \mathcal{F}(Ax) \cap \mathcal{F}(Ay)$, para cualesquiera $x,\ y \in A$.

2.2 Sea A un anillo. Demostrar que un subconjunto abierto de $\operatorname{Spec} A$ es casi–compacto si y sólo si es una unión finita de subconjuntos del tipo O_x.

2.3 Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo del anillo A. Comprobar que $\mathfrak{p}$ es maximal si y sólo si $\{\mathfrak{p}\}$ es cerrado en $\operatorname{Spec} A$.

2.4 Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales del anillo A. Mostrar que $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ y $\mathcal{F}(\mathfrak{b})$ son disjuntos si y sólo si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son comaximales.

2.5 Sea X un espacio compacto y A el anillo de las funciones continuas con valores complejos. Dado un elemento arbitrario f de A, se denota por U_f al subconjunto de X cuyos elementos son los x de X para los que $f(x) \neq 0$. Comprobar que la familia de abiertos U_f constituye una base de la topología de X. Como en el ejercicio 1.50, para cada $x \in X$ sea $\mathfrak{m}_x$ el ideal maximal definido mediante la igualdad siguiente:

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in A :\ f(x) = 0\}.$$

Demostrar que la aplicación de X al espacio topológico $\operatorname{Max} A$ de los ideales maximales de A dada por $x \mapsto \mathfrak{m}_x$, es un homeomorfismo.

2.6 Mostrar que la topología de Zariski de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ coincide con la topología cofinita. ¿Es cofinita la topología de Zariski del espectro de un dominio de integridad principal que no sea cuerpo?

2.7 Demostrar que toda álgebra finito-dimensional sobre un cuerpo F tiene únicamente un número finito de ideales primos [Indicación. Si $A \neq 0$, considerar una intersección finita de ideales primos distintos con dimensión minimal. Mostrar que los ideales que aparecen en dicha intersección son los únicos ideales primos de A].

2.8 Mostrar que si A es un álgebra finito-dimensional sobre un cuerpo F, entonces la topología de Zariski de $\operatorname{Spec} A$ es la topología discreta.

2.9 Sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfimsmo de anillos. Comprobar que la aplicación inducida $f^\star : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ induce un homeomorfismo de $\operatorname{Spec} B$ sobre el subconjunto cerrado $\mathcal{F}(\ker f)$ de $\operatorname{Spec} A$. Mostrar que, si $\mathcal{N}$ es el nilradical, entonces $\operatorname{Spec} A$ y $\operatorname{Spec}(A/\mathcal{N})$ son homeomorfos.

2.10 Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos.

(a) Mostrar que para todo ideal $\mathfrak{b}$ de B se tiene $\overline{f^\star(\mathcal{F}(\mathfrak{b}))} = \mathcal{F}(f^{-1}(\mathfrak{b}))$.

(b) Demostrar que $f^\star(\operatorname{Spec} B)$ es denso en $\operatorname{Spec} A$ si y sólo si $\ker f$ está contenido en el nilradical $\mathcal{N}$ de A. En particular, si f es monomorfismo, $f^\star(\operatorname{Spec} B)$ es denso en $\operatorname{Spec} A$.

2.11 Demostrar que un anillo A es de espectro disconexo si y sólo si contiene algún idempotente $e \neq 0, 1$.

2.12 Sea Σ un espacio topológico no vacío. Mostrar la equivalencia de las tres condiciones siguientes:

(a) Para cualesquiera dos abiertos no vacíos U y V de Σ la intersección $U \cap V$ es también no vacía.

(b) Todo abierto no vacío U es denso en Σ.

(c) Todo abierto U de Σ es conexo.

De un espacio topológico en el que se satisfacen las condiciones anteriores se dice que es un *espacio topológico irreducible*.

2.13 Sea Σ un espacio topológico. Demostrar cada una de las afirmaciones siguientes:

(a) Si Δ es un subespacio irreducible de Σ (ver el ejercicio anterior para la definición), entonces la clausura $\bar{\Delta}$ de Δ en Σ es irreducible.

(b) Cada subespacio irreducible de Σ está contenido en un subespacio irreducible maximal.

(c) Los subespacios irreducibles maximales de Σ son cerrados y recubren Σ (se denominan *componentes irreducibles* de Σ).

2.14 Sea A un anillo. Demostrar:

(a) $\operatorname{Spec} A$ es irreducible si y sólo si el nilradical de A es primo.

(b) Las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec} A$ coinciden con los conjuntos $\mathcal{F}(\mathfrak{p})$, siendo $\mathfrak{p}$ un ideal primo minimal de A.

2.15 Sea A un anillo y Δ un subconjunto de $\operatorname{Spec} A$. Se define el *ideal* $\mathcal{I}(\Delta)$ *del conjunto* Δ mediante la igualdad

$$\mathcal{I}(\Delta) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Delta} \mathfrak{p}$$

Demostrar

(a) $\mathcal{F}\mathcal{I}(\Delta) = \bar{\Delta}$

(b) $\mathcal{I}\mathcal{F}(\mathfrak{a}) = \mathrm{r}(\mathfrak{a})$ para todo ideal $\mathfrak{a}$ de A.

2.16 Sea A un anillo, Δ un subconjunto cerrado de $\operatorname{Spec} A$ e $\mathcal{I}(\Delta)$ el ideal de dicho conjunto (ver el ejercicio precedente). Demostrar que Δ es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(\Delta)$ es un ideal primo.

2.17 Comprobar que en un álgebra de Booles L se puede introducir una estructura de anillo definiendo la suma y el producto de dos elementos cualesquiera mediante las igualdades

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \qquad xy = x \wedge y.$$

Mostrar que se tiene además

$$x \vee y = xy + x + y.$$

2.18 Sea A un anillo de Boole. Demostrar las dos afirmaciones siguientes:

(a) Para todo $x \in A$ se tiene $O_x = \mathcal{F}(A(1-x))$.

(b) La aplicación $\varphi : A \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ dada por $x \mapsto \mathcal{F}(Ax)$ es inyectiva.

2.19 Comprobar que si A es un anillo de Boole entonces la familia de los subconjuntos de $\operatorname{Spec} A$ que son simultáneamente abiertos y cerrados coincide con la de los conjuntos de tipo $\mathcal{F}(Ax)$ $(x \in A)$. Usar esto para demostrar que toda álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de Boole de las partes simultáneamente abiertas y cerradas en un espacio topológico compacto.

2.20 Un subconjunto de un espacio topológico Σ se dice que es *localmente cerrado* cuando se puede poner como intersección de un abierto con un cerrado. Un subconjunto Σ_0 de Σ se dice que es *muy denso* cuando todo subconjunto localmente cerrado y no vacío de Σ tiene intersección no vacía con Σ_0. Demostrar que un anillo A es de Jacobson si y sólo si $\operatorname{Max} A$ es muy denso en $\operatorname{Spec} A$.