Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 2.
Extensiones finitas y algebraicas.

1 de junio de 2014.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

2. Extensiones finitas y algebraicas

2.1 Entre los números $(2+\sqrt{-20})/6$, $(-1+i\sqrt{3})/2$, $(1+\sqrt{5})/2$, ¿cuáles son enteros algebraicos?

2.2 Encontrar el polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$ del número complejo $x = \sqrt{2-\sqrt{5\sqrt{3}}}$.

2.3 Sea K/F una extensión de cuerpos de gado n y x un elemento de K tal que $x^3 \in F$. Demostrar:

a) Si n no es divisible por 2 ni por 3 entonces $x \in F$.

b) Si n no es divisible por 3, existe entonces $c \in F$ tal que $x^3 = c^3$.

2.4 Sea x un elemento algebraico de la extensión K/F y n un entero estrictamente positivo. Comprobar que

$$[F(x^n) : F] \geq \frac{1}{n}[F(x) : F].$$

2.5 Sea K/F una extensión cuadrática. Supóngse $K = F(z)$, donde $z^2 \in F$. Determinar los elementos de K que tienen cuadrado en F.

2.6 Determinar el polinomio irreducible de $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

2.7 Sea x una raíz del polinomio X^3+X^2+1 de $\mathbb{Q}[X]$ e y una raíz del polinomio X^2+X-8. Los números $x+y$ y xy, ¿son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$? Determinar el grado de la extensión $\mathbb{Q}(x,y)/\mathbb{Q}$.

2.8 Sea $u = \sqrt{2}\,\sqrt[3]{5}$. Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}) = \mathbb{Q}(u)$. ¿Será irreducible sobre $\mathbb{Q}$ el polinomio $X^6 - 200$?

2.9 Determinar el grado de la extensión $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}$ cuando x es un número complejo raíz del polinomio $X^6 - 6X^4 + X^3 + 9X^2 - 1$.

2.10 Sea x un elemento algebraico sobre un cuerpo F cuyo polinomio irreducible tiene grado impar. Demostrar que $F(x) = F(x^2)$.

2.11 Sean m y n primos relativos. Comprobar que, si x e y son números complejos tales que $x^m = 2$, $y^n = 3$, entonces $\mathbb{Q}(x,y) = \mathbb{Q}(xy)$. ¿Cuál es el polinomio irreducible de xy sobre $\mathbb{Q}$?

2.12 Sea K/F una extensión de cuerpos. Supóngase que x e y son elementos de K y a lo menos uno de ellos trascendente sobre F. Mostrar que $x+y$ ó xy son trascendentes sobre F.

2.13 Sea K/F una extensión de cuerpos, t y w elementos de K trascendentes sobre F. Demostrar que w es algebraico sobre $F(t)$ si y sólo si t es algebraico sobre $F(w)$.

2.14 Sea K/F una extensión de cuerpos y $x_1, \ldots, x_n$ elementos algebraicos de la extensión. Demostrar que $F(x_1, \ldots, x_n) = F[x_1, \ldots, x_n]$.

2.15 Sea F un cuerpo de característica distinta de 2, K/F una extensión de cuerpos y x e y dos elementos de K que no están en F, pero cuyos cuadrados sí lo están. Demostrar que $F(x) = F(y)$ si y sólo si x^2/y^2 es un cuadrado de F.

2.16 Sean x e y dos números complejos para los que se satisfacen las igualdades siguientes:

$$x^3 + 6x^2 + 1 = 0 \qquad y = x^7 + 6x^6 + x^4 + x^3 + 7x^2 + 2.$$

Determinar $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$, mostrar que $y \neq 0$ y que $y^{-1} = -(x^2 + x - 31)/26$.

2.17 Dar el grado de la extensión $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}$ cuando x es un número complejo que es raíz de $X^4 + 1$, y cuando lo es de $X^6 + X^3 + 1$.

2.18 Sea K/F una extensión finita de cuerpos, L un cuerpo que es extensión de K y t un elemento de L que es trascendente sobre K. Demostrar que $K(t)/F(t)$ es también una extensión finita y que se tiene además $[K(t) : F(t)] = [K : F]$.

2.19 Demostrar que todo subcuerpo de $\mathbb{C}$, que no está contenido en $\mathbb{R}$, es denso en $\mathbb{C}$.

2.20 Sea F un cuerpo de característica distinta de 2, K un cerpo que es extensión del cuerpo F, x e y elementos de K con sus cuadrados en F, pero con $y \notin F$ y $x \notin F(y)$. Demostrar que $F(x+y) = F(x,y)$ y que el polinomio irreducible de $x+y$ sobre F es del tipo $X^4 + aX^2 + b$.

2.21 Sea F un cuerpo de característica distinta de 2 y K/F una extensión de grado 4. Demostrar la equivalencia de las dos afirmaciones siguientes:

a) La extensión K/F tiene algún cuerpo intermedio distinto de E y de F.

b) Existe algún $x \in K$ tal que $K = F(x)$ con polinomio irreducible sobre F del tipo $X^4 + aX^2 + b$.

2.22 Si $n > 0$ es un entero y z un elemento dado de un anillo A, se dirá que z es una *raíz* n*-ésima de la unidad* si se satisface la igualdad $z^n = 1$. Sea p un primo positivo y $\varepsilon \neq 1$ un número complejo que es raíz p-ésima de la unidad. Determinar $[\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}]$.

2.23 Sea $p > 0$ un número primo impar. Demostrar que $x = \cos(2\pi/p)$ es un número algebraico y que $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = (p-1)/2$.

2.24 Sea p un número primo y x un número complejo que es raíz del polinomio $X^n - p$. Sea m un entero positivo tal que $m \mid n$. Demostrar que $[\mathbb{Q}(x^m) : \mathbb{Q}] = n/m$. Determinar el polinomio irr $\Big(x, X, \mathbb{Q}(x^m)\Big)$.

2.25 Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión finita de grado impar. Mostrar que las únicas raíces de la unidad en K son 1 y -1.

2.26 Sea K/F una extensión finita de cuerpos en la que el conjunto de los cuerpos intermedios es totalmente ordenado respecto a la inclusión. Demostrar que K/F es monógena.

2.27 Sea $K = \mathbb{Q}(x)$ donde x es un número complejo para el que se verifica $x^3 - 2x^2 + 4x + 2 = 0$. Expresar $(x^3 + x + 1)(x^2 + x)$ y $(x-3)^{-1}$ en la forma $ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

2.28 Sea K/F una extensión algebraica de cuerpos. Demostrar que si F es finito, K es a lo sumo numerable y si F es infinito los cardinales de F y K coinciden.

2.29 Sea K/F una extesión de cuerpos. Supóngase que existe un entero positivo n para el que todo cuerpo intermedio E estrictamente contenido en K es tal que se verifica $[E : F] < n$. Demostrar que K es una extensión finita de F. [Indicación. Comprobar primero que K/F es una extensión algebraica].

2.30 Para cada entero $n \geq 1$ sea K_n el subcuerpo de $\mathbb{R}$ definido por la igualdad $K_n = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$.

a) Mostrar que $[K_n : \mathbb{Q}] = n$.

b) Comprobar que si $m|n$ entonces $K_m \subset K_n$. Determinar $[K_n : K_m]$.

c) Demostrar que, en el caso en que m y n sean primos relativos, se tiene entonces $K_{mn} = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[m]{2})$.

2.31 Sea K/F una extensión de cuerpos, x e y elementos de K algebraicos sobre F. Demostrar que $\operatorname{irr}(x, X, F)$ es irreducible sobre $F(y)$ si y sólo si $\operatorname{irr}(y, X, F)$ es irreducible sobre $F(x)$.

2.32 Sean K y L subcuerpos de un cuerpo común. Supongamos otro cuerpo F tal que K/F y L/F son extensiones algebraicas. Demostrar que el mínimo subcuerpo $L \vee K$ que contiene a L y K está formado por las sumas finitas $\sum x_i y_i$, donde los elementos x_i están en K y los y_i en L.

2.33 Sea $\mathcal{U}$ la clase de todos los cuerpos. Demostrar que, tanto la clase de las extensiones finitas, como la de las extensiones algebraicas, son clases $\mathcal{U}$-distinguidas de extensiones (Ver el ejercicio 7 de la sección anterior).

2.34 Sea K/F una extensión de cuerpos. Demostrar que dicha extensión es algebraica si y sólo si todo subanillo A tal que $F \subset A \subset K$ es necesariamente un cuerpo.

2.35 Sea K/F una extensión de cuerpos, t y w elementos de K tales que t es trascendente sobre F y w es trascendente sobre $F(t)$. Demostrar que para cualesquiera enteros positivos n y m se tiene entonces $[F(t, w) : F(t^n, w^m)] = nm$.

2.36 Hacer $x_1 = 2$ y definir $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ para todo entero $n > 1$. Demostrar que

$$[\mathbb{Q}(x_{n+1}) : \mathbb{Q}] = 2^n$$

y que el polinomio $X^{2^n} - 2$ es un polinomio irreducible de $\mathbb{Q}[X]$.

2.37 Sea $K = F(X)$ el cuerpo de funciones racionales en una indeterminada sobre el cuerpo F y E un cuerpo intermedio de la extensión K/F. Demostrar que $E \neq F$ si y sólo si K/E es una extensión finita. Determinar el grado de esta extensión cuando $E = F(X^3/(X+1))$.

2.38 Sea K/F una extensión de cuerpos. Supóngase:

a) La unión de cualquier cadena de subcuerpos intermedios y distintos de K es distinto de K.

b) Todo cuerpo intermedio y distinto de K es una extensión finita de F.

Demostrar que K es una extensión finita de F.

2.39 Comprobrar que el polinomio

$$f(X) = 4X^3 - 3X - \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

es reducible en $\mathbb{Q}(\sqrt{5})[X]$.

2.40 Sea $\{K_i\}_{i\in\mathcal{A}}$ una familia de subcuerpos de un cuerpo L, todos ellos extensiones de un cuerpo F. Para cada $i \in \mathcal{A}$, sea A_i el subcuerpo de los elementos de K_i que son algebraicos sobre F. Comprobar que el cuerpo de los elementos de $\bigcap K_i$ que son algebraicos sobre F coincide con $\bigcap A_i$.

2.41 Supongamos que el número complejo x tiene por polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$ a $X^3 + aX^2 + bX + c$. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que exista algún $y \in \mathbb{Q}(x)$ tal que $y^2 = x$ es que existan $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Q}$ tales que

$$a = 2\beta - \alpha^2, \qquad b = \beta^2 - 2\alpha\delta, \qquad c = -\delta^2$$

[Indicación: Considerar el polinomio irreducible de y sobre $\mathbb{Q}$].

2.42 *a*) Mostrar que si u es un número complejo raíz del polinomio $X^3 + X^2 - 1$ entonces u no tiene ninguna raíz cuadrada en $\mathbb{Q}(u)$.

b) Dar $\sqrt[3]{28} - 3$ como un cuadrado de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{28})$.

2.43 Sea K/F una extensión de cuerpos y S un subconjunto de K que no corta a F. Mostrar la existencia de algún cuerpo intermedio M de la extensión K/F que es maximal respecto a la inclusión en la familia de los subcuerpos de K que contienen a F y no cortan a S. Demostrar que si S es finito entonces K/M es una extensión algebraica.

2.44 Demostrar que si $p_1, \ldots, p_n$ son primos positivos distintos entonces se tiene

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n.$$

2.45 Sea t un elemento trascendente sobre el cuerpo F y $K = F(t)$. Escríbase cada elemento no nulo de K como $u = f(t)/g(t)$ donde f y g son polinomios en una indeterminada, con $g \neq 0$, y tales que m.c.d.$(f, g) = 1$. Al máximo de los grados de f y g se llama grado de u y se denota por $\deg u$. Demostrar que si X e Y son dos indeterminadas distintas entonces $f(X) - Yg(X)$ es irreducible tanto en $F[X, Y]$ como en $F(Y)[X]$. Demostrar que si $u \notin F$ entonces t es algebraico sobre $F(u)$ y el polinomio irreducible de t sobre $F(u)$ coincide con el único polinomio mónico que puede obtenerse de $f(X) - ug(X)$ multiplicándolo por una constante no nula de $F(u)$. Concluir así que $[F(t) : F(u)] = \deg u$, cuando $u \notin F$ y, en particular, se verifica $F(t) = F(u)$ si y sólo si $u = (at + b)/(ct + d)$, donde $ab - bc \neq 0$.

2.46 Sea F un cuerpo, K y L cuerpos extensiones algebraicas de F que están contenidos como subcuerpos de un mismo cuerpo M. Sea $K \vee L$ el mínimo subcuerpo de M que contiene a K y a L. Establecer la desigualdad $[K \vee L : F] \leq [K : F][L : F]$, caracterizando los casos en que se da la igualdad mediante una propiedad de las bases del F-espacio vectorial K.

2.47 Sean F, K, L, M y $K \vee L$ cuerpos en las condiciones del ejercicio anterior. Supóngase además que K/F y L/F son ambas finitas. Caracterizar también los casos en que se da la igualdad $[K \vee L : F] = [K : F][L : F]$ en términos de los polinomios irreducibles de los elmentos de los subconjuntos finitos S tales que $K = F(S)$.

a) Demostrar que si $[K \vee L : F] = [K : F][L : F]$, entonces $K \cap L = F$.

b) Mostrar que en el caso en que $[K : F]$ y $[L : F]$ sean primos relativos se verifica entonces $[K \vee L : F] = [K : F][L : F]$.

c) Supóngase que $[M : F] = 4$, $[K : F] = 2 = [L : F]$, $K = F(x)$, $L = F(y)$. Demostrar la equivalencia de las propiedades siguientes: i) $K \neq L$, ii) $K \vee L = M$, iii) $\{1, x, y, xy\}$ es una base del F-espacio vectorial $K \vee L$.

2.48 Sea K un cuerpo y A un subanillo de K. Mostrar que el cuerpo de cocientes F de A puede identificarse a un subcuerpo de K. Supóngase que K es finitamente generado como A-módulo. Descomponiendo K como suma directa de F y un cierto F-subespacio sumplementario W, muéstrese que F es finitamente generado como A-módulo. Pruébese la igualdad $A = F$.

2.49 Sea K un cuerpo, A un subanillo de K y F un subcuerpo de K que coincide con el cuerpo de cocientes de A. Supóngase que $K = A[x_1, \ldots, x_n]$ con cada x_i algebraico sobre F. Mostrar que existe algún $s \in A$, $s \neq 0$, para el que K es un $A[1/s]$-módulo finitamente generado. Usando el ejercicio anterior, probar que $F = A[1/s]$. Demostrar que s pertenece a todo ideal primo no nulo de A.

2.50 Sea K/F una extensión de cuerpos tal que $K = F[x_1, \ldots, x_n]$.

a) Demostrar que los x_i son algebraicos sobre F. [Indicación. Razonar por reducción al absurdo y formar un subconjunto S maximal entre los subconjuntos de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ que son algebraicamente independientes. Comprobar que en $F[S]$ la intersección de todos los ideales maximales es (0) y aplicar el ejercicio precedente].

b) En el caso en que F sea un cuerpo algebraicamente cerrado, ¿qué puede decirse del cuerpo K del apartado anterior?.

c) Mostrar que en el álgebra de polinomios $F[X_1, \ldots, X_n]$ todo ideal maximal tiene codimensión finita sobre F.

Los apartados (a) y (b) de este ejercicio constituyen la versión algebraica de la forma débil del teorema de los ceros de Hilbert.