Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 4.
Anillos y módulos de fracciones

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1]Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

4 Anillos y módulos de fracciones

4.1 Los anillos de fracciones de anillos de Jacobson, ¿son de Jacobson?

4.2 Comprobar que, para un dominio de integridad D, cualquier anillo de fracciones respecto a una parte multiplicativa de D puede identificarse a un subanillo del cuerpo de cocientes.

4.3 Sea S un subconjunto multiplicativo del anillo A, $\mathfrak{a}$ un ideal de A y $p : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ la proyección canónica. Comprobar que $p(S)$ es un subconjunto multiplicativo de $A/\mathfrak{a}$ y que el ideal

$$S^{-1}\mathfrak{a} = \{a/s : \ a \in \mathfrak{a}, \ s \in S\}$$

es tal que $p(S)^{-1}(A/\mathfrak{a}) \cong S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{a}$.

4.4 Sea A un anillo, S un subconjunto multiplicativo de A y M un A-módulo. Demostrar cada una de las afirmaciones siguientes:

(a) Si N_1 y N_2 son submódulos del A-módulo M entonces $S^{-1}(N_1 \cap N_2) = S^{-1}N_1 \cap S^{-1}N_2$.

(b) Mostrar que la análoga de la propiedad anterior para familias infinitas de submódulos puede no satisfacerse. [Indicación. Sea F un cuerpo infinito. Considerar el anillo de polinomios $F[X]$ y la familia de ideales $\{(X - a) : \ a \in F\}$].

(c) Para toda familia $\{N_i\}_{i\in\mathcal{A}}$ de submódulos del M se tiene

$$S^{-1}\left(\sum_{i\in\mathcal{A}} N_i\right) = \sum_{i\in\mathcal{A}} S^1 N_i.$$

(d) Si M es de generación finita entonces

$$S^{-1} \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}_{S^{-1}A} S^{-1}M.$$

(e) $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$ para todo submódulo N de M.

4.5 Sea S un subconjunto multiplicativo del anillo A. Comprobar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales de A entonces $S^{-1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} + S^{-1}\mathfrak{b}$.

(b) $S^{-1}\operatorname{r}(\mathfrak{a}) = \operatorname{r}(S^{-1}\mathfrak{a})$ para todo ideal $\mathfrak{a}$ de A.

4.6 Sea S un subconjunto multiplicativo del anillo A y M un A-módulo. Supóngase que para cada $s \in S$ la aplicación $\gamma_s : M \longrightarrow M$, dada por $\gamma_s : x \mapsto sx$, es biyectiva. Mostrar que $M \cong S^{-1}M$.

4.7 Sea A un anillo, S un subconjunto multiplicativo de A y M un $S^{-1}A$-módulo. Mostrar que, para la estructura de A-módulo obtenida por restricción de escalares, cada una de las aplicaciones de multiplicación γ_s es biyectiva ($s \in S$). Comprobar que los $S^{-1}A$-módulos M y $S^{-1}M$ son isomorfos.

4.8 Sea S un subconjunto multiplicativo del anillo A. Mostrar que si M y N son $S^{-1}A$-módulos se tiene entonces $M \otimes_{S^{-1}A} N \cong M \otimes_A N$.

4.9 Sea A un anillo. Comprobar que para dos submódulos N y T del A-módulo M la igualdad $N = T$ es equivalente a que se tenga $N_{\mathfrak{m}} = T_{\mathfrak{m}}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Mostrar que, si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales de A, la igualdad $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ se satisface si y sólo si $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ que contenga a $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Comprobar que la comaximalidad de dos ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ del anillo A se puede caracterizar por la comaximalidad de $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}$ y $\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$ en cada uno de los anillos $A_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} \in \operatorname{Máx} A$).

4.10 Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo del anillo A. Demostrar que el cuerpo de cocientes de $A/\mathfrak{p}$ es isomorfo con $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

4.11 Sea S un subconjunto multiplicativo del anillo A. Demostrar que $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ es homeomorfo al subespacio

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$$

4.12 Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos y S un subconjunto multiplicativo de A. Comprobar que el $S^{-1}A$-módulo $S^{-1}B$ puede dotarse de modo natural de una estructura de anillo, con la cual es isomorfo al anillo $f(S)^{-1}B$.

4.13 Sea S un subconjunto multiplicativo del anillo A. Mostrar que si M es un A-módulo proyectivo (resp. libre) entonces $S^{-1}M$ es un $S^{-1}A$-módulo proyectivo (resp. libre)

4.14 ¿Son de generación finita los módulos de fracciones de módulos finitamente generados?

4.15 Sea A un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal de A y M un A-módulo. Comprobar que entonces

$$S^{-1}(\mathfrak{a}M) = (S^{-1}\mathfrak{a})(S^{-1}M)$$

4.16 Sea A un anillo y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Sea $S = 1 + \mathfrak{a}$. Comprobar que S es multiplicativamente cerrado y que $S^{-1}\mathfrak{a}$ está contenido en el radical de Jacobson de $S^{-1}A$. Usar esto, el ejercicio anterior y el lema de Nakayama para demostrar que si M es un A-módulo finitamente generado tal que $\mathfrak{a}M = M$ existe entonces algún elemento s de A tal que $s \equiv 1 (\operatorname{mód} \mathfrak{a})$ para el que se tiene que $sM = 0$.

4.17 Sea M un A-módulo y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Se supone que $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todos los ideales maximales $\mathfrak{m}$ de A para los que se tiene $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$. Demostrar que $M = \mathfrak{a}M$.

4.18 (Teorema chino de los restos). Sean $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ ideales comaximales de un anillo A. Observando que cualquier ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A contiene a lo sumo a uno de los $\mathfrak{a}_i$, demostrar, tras usar localización, que la aplicación

$$\Phi : A/\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{a}_i)$$

dada por $\Phi : x + \bigcap \mathfrak{a}_i \mapsto (x + \mathfrak{a}_1, \ldots, x + \mathfrak{a}_n)$, es un isomorfismo de anillos.

4.19 Sea S un subconjunto multiplicativo del anillo A. Demostrar que el nilradical de $S^{-1}A$ coincide con la extensión del nilradical de A en $S^{-1}A$.

4.20 Dado un A-módulo M se denomina *soporte* de M al subconjunto de los ideales primos $\mathfrak{p}$ de A para los que $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Se le denota por $\operatorname{Sop} M$. Comprobar que si M es finitamente generado se tiene entonces la igualdad

$$\operatorname{Sop} M = \mathcal{F}(\operatorname{Ann} M).$$

4.21 Mostrar que si M y N son A-módulos finitamente generados entonces $\operatorname{Sop}(M \otimes_A N) = \operatorname{Sop} M \cap \operatorname{Sop} N$.

4.22 Sea A un anillo, y un elemento de A. Se denota por A_y al anillo de fracciones $S^{-1}A$ cuando se toma el subconjunto multiplicativo S constituido por las potencias $1, y, y^2, \ldots$ del elemento y. Supóngase que para dos elementos dados $y,\ z \in A$ se tiene la igualdad de abiertos de Zariski $O_y = \emptyset_z$. Demostrar que $A_y \cong A_z$.

4.23 Sea S un subconjunto multiplicativo del anillo A y M un A-módulo. Para todo submódulo N de M se denota por $\mathcal{S}(N)$, y se llama la $\mathcal{S}$-*componente* de N, al subconjunto definido por la igualdad siguiente:

$$\mathcal{S}(N) = \{x \in M : \ sx \in N \text{ para algún } s \in S\}.$$

Comprobar que $\mathcal{S}(N)$ es un submódulo de M que contiene a N, siendo además $\mathcal{S}(\mathcal{S}(N)) = \mathcal{S}(N)$. Demostrar que la aplicación $N \mapsto S^{-1}N$ es una biyección creciente entre los A-submódulos N de M para los que $\mathcal{S}(N) = N$ y los $S^{-1}A$-submódulos de $S^{-1}M$.

4.24 Sea A un dominio de integridad principal y K su cuerpo de cocientes.

(a) Demostrar que cualquier subanillo B de K que contiene a A es un anillo de fracciones de A. [Indicación. Si $a/b \in B$, con $b \neq 0$ y a y b primos entre sí, demostrar que $1/b \in B$ utilizando la identidad de Bézout].

(b) Clasificar los anillos de fracciones de A. [Indicación. Considerar los elementos de primos de A que son inversibles en $S^{-1}A$].

(c) Demostrar que todo anillo de fracciones de A es principal.

4.25 Sea D un dominio de integridad de cuerpo de cocientes F. Comprobar que para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de D puede considerarse a $D_{\mathfrak{m}}$ como un subanillo de F. Demostrar que

$$D = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} D} D_{\mathfrak{m}}$$

4.26 Sea A un anillo y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Comprobar que la imagen canónica de $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}}$ en $\operatorname{Spec} A$ coincide con la intersección de todos los entornos abiertos de $\mathfrak{p}$ en $\operatorname{Spec} A$.

4.27 Sea A un dominio de factorización única y S un subconjunto multiplicativo de A que no contiene a cero. Demostrar que $S^{-1}A$ es también dominio de factorización única.

4.28 Sea A un anillo. Demostrar las dos afirmaciones siguientes:

(a) Si A es absolutamente plano y S un subconjunto multiplicativo de A, entonces $S^{-1}A$ es absolutamente plano.

(b) A es absolutamente plano si y sólo si $A_{\mathfrak{m}}$ es un cuerpo para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

4.29 Sea A un anillo. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) El cociente de A sobre su nilradical es absolutamente plano.

(b) Todo ideal primo de A es maximal.

(c) $\operatorname{Spec} A$ es un espacio topológico T_1.

(d) $\operatorname{Spec} A$ es de Hausdorff.

4.30 Sea S un subconjunto multiplicativo del anillo A, M y N A-módulos, con M de presentación finita. Mostrar la existencia de un isomorfismo natural

$$\eta_{M,N} : S^{-1} \operatorname{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

4.31 Sea A un anillo. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) El anillo $A_{\mathfrak{p}}$ es local aritmético para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A.

(b) Para cualesquiera ideales $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{c}$ de A se tiene

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}).$$

(c) Se tiene $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$, para cualesquiera ideales $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{c}$ de A.

4.32 Sea A un dominio de integridad y M un A-módulo. Se llama *submódulo de torsión*, y se denota por $\mathrm{T}(M)$ al submódulo definido por la igualdad siguiente:

$$\mathrm{T}(M) = \{x \in M : \ ax = 0 \text{ para algún } a \in A \text{ con } a \neq 0\}.$$

Cuando $\mathrm{T}(M) = 0$ se dice de M que es *sin torsión*. Supóngase que S es un subconjunto multiplicativo de A. Comprobar que $\mathrm{T}(S^{-1}M) = S^{-1}\mathrm{T}(M)$. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones dadas a continuación:

(a) M es sin torsión.

(b) $M_{\mathfrak{p}}$ es sin torsión para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A.

(c) El $A_{\mathfrak{m}}$-módulo $M_{\mathfrak{m}}$ es sin torsión para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

4.33 Sea A un anillo. Demostrar la equivalencia de las siguientes afirmaciones.

(a) Para todo ideal primo $\mathfrak{p}$, el anillo $A_{\mathfrak{p}}$ es un dominio de integridad.

(b) $A_{\mathfrak{m}}$ es un dominio de integridad, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$.

(c) Para cualesquiera $x,\ y \in A$ tales que $xy = 0$ se tiene $\mathrm{Ann}(x) + \mathrm{Ann}(y) = A$.

4.34 Dar algún ejemplo de un anillo A que no es dominio de integridad y en el que $A_{\mathfrak{p}}$ es dominio de integridad para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A.

4.35 Sea A un anillo. Comprobar que si, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$, el anillo $A_{\mathfrak{p}}$ no tiene elementos nilpotentes no nulos, entonces A tampoco tiene elementos nilpotentes no nulos.

4.36 Sea A un anillo semilocal cuyos ideales maximales son $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$. Supóngase que M y N son A-módulos de presentación finita tales que $M_{\mathfrak{m}_i} \cong N_{\mathfrak{m}_i}$ para $i = 1, \ldots, r$. Demostrar que M y N son entonces isomorfos. [Indicación. Para todo i, mostrar la existencia de algún homomorfismo $\varphi_i : M \longrightarrow N$ tal que $(\varphi_i)_{\mathfrak{m}_i}$ es ismomorfismo. Considerar una suma $\sum_i a_i\varphi_i$, con cada a_i en el correspondiente $\mathfrak{m}_i$ y en ninguno de los restantes $\mathfrak{m}_j$, y usar el ejercicio 3. para mostrar que dicho homomorfismo es un ismomorfismo].

4.37 Sea M un A-módulo finitamente generado y n un entero mayor o igual que 1. Demostrar que el conjunto de los ideales primos $\mathfrak{p}$ de A para los que $M_{\mathfrak{p}}$ admite algún sistema de generadores de n elementos constituye un abierto respecto a la topología de Zariski. [Indicación. Si $M_{\mathfrak{p}}$ admite un sistema de generadores de n elementos, mostrar que es posible elegir un sistema de generadores de $M_{\mathfrak{p}}$ que es del tipo $\{x_1/1, \ldots, x_n/1\}$. Definir $g : A^n \longrightarrow M$ de modo que cada uno de los elementos de la base canónica se transforme por g en el correspondiente x_i. Considerar las localizaciones de una sucesión exacta del tipo

$$A^n \xrightarrow{g} M \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

y usar el ejercicio 20].

4.38 Sea S un subconjunto multiplicativo del anillo A. Elíjase un conjunto de indeterminadas $\{X_s : \ s \in S\}$ tal que $s \mapsto X_s$ es una biyección entre S y dicho conjunto de indeterminadas. Sea B el anillo de polinomios con coeficientes en A y con indeterminadas en el conjunto $\{X_s : \ s \in S\}$. Sea $\mathfrak{a}$ el ideal de este anillo de polinomios que está generado por los elementos del tipo $sX_s - 1$. Demostrar que el anillo cociente $B/\mathfrak{a}$ es isomorfo a $S^{-1}A$. ¿Puede prescindirse del carácter multiplicativamente cerrado del conjunto S para que B goce de una propiedad universal análoga a la de la proposición **??**?

4.39 Demostrar que para todo A-módulo M, y cualquier subconjunto multiplicativo S del anillo A, el A-módulo $S^{-1}M$ es plano.

4.40 Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos y M un B-módulo. Demostrar que la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) El A-módulo M es plano.

(b) La localización $M_{\mathfrak{q}}$ de M en cada ideal primo $\mathfrak{q}$ de B es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo plano, siendo $\mathfrak{p}$ la contracción en A del ideal $\mathfrak{q}$.

(c) Si $\mathfrak{n}$ es un ideal maximal arbirario de B y $\mathfrak{p}$ su contracción en A, entonces el $A_{\mathfrak{p}}$-módulo $M_{\mathfrak{n}}$ es plano.

4.41 Sea A un anillo de Jacobson, que es dominio de integridad. Supóngase que existe algún elemento $s \neq 0$ tal que A_s es un cuerpo. Demostrar que A es también un cuerpo.

4.42 Demostrar que para un anillo A son equivalentes las dos afirmaciones siguientes:

(a) A es de Jacobson.

(b) Para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ y cualquier elemento $x + \mathfrak{p}$, distinto de la clase cero de $C = A/\mathfrak{p}$ y para el que el anillo de fracciones $C_{x+\mathfrak{p}}$ es un cuerpo, se tiene que C es también cuerpo.

4.43 Supóngase que

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$$

son A-módulos y homomorfismos de A-módulos, siendo T de presentación finita. Mostrar que dicha sucesión es exacta descomponible si y sólo si lo es

$$0 \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} T_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de A. [Indicación. Utilizar la caracterización de la descomponibilidad dada por la suprayectividad del homomorfismo $g^\star : \mathrm{Hom}_A(T, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T, T)$ inducido por g].

4.44 Sea A un anillo y M un A-módulo de presentación finita. Demostrar la equivalencia de las condiciones siguientes:

(a) M es un A-módulo plano.

(b) $M_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo libre para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A.

(c) $M_{\mathfrak{m}}$ es un $A_{\mathfrak{m}}$-módulo libre para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

4.45 Sea A un anillo, S y T subconjuntos multiplicativos de A tales que $S \subset T$. Comprobar que

$$S^{-1}T = \left\{ \frac{t}{s} : \ t \in T, s \in S \right\}$$

es un subconjunto multiplicativo de $S^{-1}A$ y que se tiene el siguiente isomorfismo de anillos:

$$T^{-1}A \cong (S^{-1}T)^{-1}(S^{-1}A).$$

4.46 Sean S y T subconjuntos multiplicativos del anillo A tales que $S \subset T$. Sea $\psi : S^{-1}A \longrightarrow T^{-1}A$ el homomorfismo de anillos que lleva cada elemento a/s de $S^{-1}A$ en a/s visto como elemento de $T^{-1}A$. Demostrar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(a) ψ es biyectiva.

(b) El elemento $t/1$ es inversible en $S^{-1}A$, para todo $t \in T$.

(c) Para todo $t \in T$ existe algún $x \in A$ tal que $xt \in S$.

(d) T está contenido en la saturación de S.

(e) Cada ideal primo de A que corta a T corta también a S.

4.47 Sea A un anillo y S un subconjunto multiplicativo de A. Comprobar que la saturación $\bar{S}$ de A está dada por la igualdad siguiente:

$$\bar{S} = \{x \in A : \text{ existen } y \in A, \ s \in S \text{ tales que } s = xy\}.$$

Mostrar que el homomorfismo $g : S^{-1}A \longrightarrow \bar{S}^{-1}A$ dado por $g : x/s \mapsto x/s$ es un isomorfismo.

4.48 Sea S_0 el subconjunto muiltiplicativo de los no divisores de cero de un anillo A. Al anillo $S_0^{-1}A$ se llama *anillo total de fracciones* de A. Demostrar las afirmaciones siguientes:

(a) S_0 es el mayor subconjunto multiplicativo de A para el que el homomorfismo canónico $A \longrightarrow S_0^{-1}A$ es inyectivo.

(b) Cada elemento de $S_0^{-1}A$ es divisor de cero o inversible.

(c) Cada anillo en el que cada no inversible es divisor de cero coincide con su anillo total de fracciones; más precisamente, el homomorfismo $\iota_{S_0} : A \longrightarrow S_0^{-1}A$ es isomorfismo.

4.49 Sea A un anillo y M un A-módulo finitamente generado. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) M es proyectivo.

(b) M es de presentación finita y $M_{\mathfrak{m}}$ es un $A_{\mathfrak{m}}$-módulo libre.

4.50 Sea S un subconjunto multiplictivo de un anillo A. Demostrar que se tiene el isomorfismo

$$S^{-1} \operatorname{Tor}_n^A(M, N) \cong \operatorname{Tor}_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

para todo entero $n \geq 0$ y cualesquiera A-módulos M y N.

4.51 Sea M un A-módulo. Se dice que M es *plenamente plano* cuando la exactitud de cualquier sucesión

$$N \xrightarrow{f} N' \xrightarrow{g} N''$$

es equivalente a la de la sucesión

$$N \otimes_A M \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}} N' \otimes_A M \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}} N'' \otimes_A M$$

Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) M es plenamente plano.

(b) M es plano y $N \otimes_A M \neq 0$ para todo A-módulo $N \neq 0$.

Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos, B plenamente plano como A-módulo, $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A y S el subconjunto complementario en dicho anillo. Demostrar que $S^{-1}B$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo plenamente plano.

4.52 Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Demostrar que $\mathfrak{p}$ es contracción de algún ideal primo de B si y sólo si $f^{-1}(f(\mathfrak{p})B) = \mathfrak{p}$.

4.53 (a) Demostrar que un A-módulo plano M es plenamente plano si y sólo si para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A se tiene $\mathfrak{m}M \neq M$. [Indicación. En el supuesto en que se satisfaga la condición, considérese un submódulo N' del A-módulo $N \neq 0$, que es isomorfo a $A/\mathfrak{a}$ para un cierto ideal propio $\mathfrak{a}$ de A. Mostrar que $N' \otimes_A M \neq 0$ y consecuentemente $N \otimes_A M \neq 0$.]

(b) Usar la parte precedente y el ejercicio anterior para demostrar que si $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, y B es plano como A-módulo, son entonces equivalentes cada una de las afirmaciones siguientes:

i. $\mathfrak{a}$ coincide con la contracción de su extensión, para $\mathfrak{a}$ ideal arbitrario de A.
ii. La aplicación $\operatorname{Spec} f : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ es suprayectiva.
iii. $f(\mathfrak{m})B \neq B$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A.
iv. El A-módulo B es plenamente plano.
v. Para todo A-módulo M la aplicación $\varphi : M \longrightarrow M \otimes_A B$ dada por $\varphi : x \mapsto x \otimes 1$ es inyectiva.

[Indicación. Para $d \Rightarrow e$ empezar comprobando que para cualquier A-módulo N la aplicación $N \longrightarrow N \otimes_A B$ dada por $x \mapsto x \otimes 1$ es inyectiva. Considerar una sucesión exacta del tipo

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} M \otimes_A B$$

y tensorizar con B.]

En el caso en que se satisfagan las condiciones anteriores se dice que B es una A-álgebra *plenamente plana*.

4.54 (a) Sean A y B anillos locales cuyos ideales maximales correspondientes son $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$. Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Se dice que f es un *homomorfismo local* si $f(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$. Supóngase que este es el caso y que además B es una A-álgebra plana. Mostrar que B es plenamente plana.

(b) Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A. Supóngase que S contiene elementos que no son inversibles. Comprobar que $S^{-1}A$ es una A-álgebra plana que no es plenamente plana.

4.55 Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos, $\mathfrak{q}$ un ideal primo de B y $\mathfrak{p}$ su contracción en A. Supóngase que B es plana como A-álgebra. Demostrar que $B_{\mathfrak{q}}$ es una $A_{\mathfrak{p}}$-álgebra que es plenamente plana. [Indicación. Para la planitud del álgebra observar que $B_{\mathfrak{q}}$ es plano sobre $B_{\mathfrak{p}}$ y que éste último es plano como $A_{\mathfrak{p}}$-módulo].

4.56 Sea G un grupo finito de automorfismos de A y A^G el subanillo de los elementos de A que permanecen fijos por cada automorfismo del grupo G. Demostrar que A es entero sobre A^G. Sea S un subconjunto multiplicativo de A tal que $\sigma(S) \subset S$ para todo $\sigma \in G$. Mostrar que todo $\sigma \in G$ induce un automorfismo de $S^{-1}A$. Demostrar que se tiene el siguiente isomorfismo de anillos

$$(S^G)^{-1}A^G \cong (S^{-1}A)^G.$$