Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 13.
Teorema fundamental del álgebra.

30 de mayo de 2014.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

13. Teorema fundamental del álgebra

13.1 ¿Cuáles son las extensiones algebraicas del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales?

13.2 Mostrar que los polinomios irreducibles de $\mathbb{R}[X]$ son a lo sumo de grado 2.

13.3 (F. Terkelsen). Sea $f(X)$ un polinomio no constante de $\mathbb{C}[X]$. Mostrar que existe algún $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Hacer $g(X) = f(X + z_0)$ y escribir $g(X) = a + bX^n + X^{n+1}h(X)$, donde $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, h un polinomio de $\mathbb{C}[X]$ y n un entero mayor o igual que 1. Supóngase que $g(0) = a \neq 0$ y elíjase $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^n = -a/b$ y $t \in (0, 1)$ satisfaciéndose $t|w^{n+1}h(tw)| < |a|$. Demostrar que entonces $|g(tw)| < |g(0)|$, lo que contradice la desigualdad $|f(z_0)| \leq |f(z)|$. Obtener de aquí otra demostración del teorema fundamental del álgebra.