Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 17.
Subgrupos derivados. Solubilidad de grupos.

1 de junio de 2014.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

17. Subgrupos derivados. Solubilidad de grupos

17.1 Comprobar que para cualesquiera elementos x, y, z de un grupo G se tiene

$$[xy, z] = x[yz]x^{-1}[xy] = [yz]\,[[zy]x]\,[xz]$$

17.2 Sean x e y elementos de un grupo G que conmutan ambos con $[xy]$. Supóngase que x e y tienen órdenes n y m. Sea d el máximo común divisor de n y m. Demostrar que $[xy]^d = 1$.

17.3 Sea N un subgrupo normal del grupo G. Supóngase $N \cap G^{(1)} = \{1\}$. Comprobar que N está contenido en el centro de G.

17.4 Sea K/F una extensión finita y de Galois. Demostrar que existe algún cuerpo intermedio E tal que E/F es una extensión de Galois abeliana que contiene a cualquier otro cuerpo intermedio que sea extensión de Galois abeliana de F.

17.5 Mostrar que $V = \{\mathrm{Id}, (12)(34), (12)(24), (14)(43)\}$ es un subgrupo normal de S_4 y que S_4 es un grupo soluble.

17.6 Sea G un grupo. Para cada entero $i \geq 1$ se define G^i mediante las fórmulas siguientes:

$$G^1 = G, \qquad G^i = [G^{i-1}G].$$

La sucesión

$$G = G^1 \supset G^2 \supset \cdots$$

se dice que es la *sucesión central inferior* de G. El grupo G se dice que es *nilpotente* cuando existe algún entero $n \geq 1$ tal que $G^n = \{\mathrm{Id}\}$. Comprobar las afirmaciones siguientes:

a) Cada G^i es un subgrupo característico; esto es, cualquier automorfismo f de G es tal que $f(G^i) \subset G^i$.

b) Si G es nilpotente entonces G es soluble.

c) Existen grupos solubles *no* nilpotentes.

17.7 Sea G un grupo nilpotente y H un subgrupo propio de G. Demostrar que H está propiamente contenido en su normalizador.

17.8 Sea G un grupo finito en el que todo subgrupo propio H de G es normal y de cociente abeliano. Demostrar que G es abeliano o un p-grupo.

17.9 Sea G un grupo finito en el que todo subgrupo propio H es normal y de cociente cíclico. Demostrar que G es abeliano.