Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 4.
Extensión de inmersiones.

9 de diciembre de 2009.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

4. Extensión de inmersiones

4.1 Demostrar que la extensión de cuerpos K/F es algebraica si y sólo si para todo cuerpo intermedio E se verifica que cualquier inmersión de E en sí mismo que induce la identidad sobre F es necesariamente un F-automorfismo de E.

4.2 Mostrar que la identidad es el único automorfismo de cuerpo $\mathbb{R}$ de los número reales.

4.3 ¿Existen automorfismos del cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos distintos de la identidad y la conjugación?

4.4 Sea a un número racional y x una raíz del polinomio $X^4 + a$. Demostrar que el número de inmersiones de $\mathbb{Q}(x)$ en $\mathbb{C}$ es distinto de 4 si y sólo si se verifica alguna de las dos alternativas siguientes: (i) $-a$ es el cuadrado de un número racional, (ii) $4a$ es potencia cuarta de algún racional.

4.5 Sea K/F una extensión de cuerpos, t un elemento trascendente de la extensión, L un cuerpo y $\sigma : F \longrightarrow L$ una inmersión. Comprobar que el conjunto de las inmersiones $\tau : F(t) \longrightarrow L$ que extienden a σ está en biyección con el conjunto de los elementos de L que son trascendentes sobre $\sigma(F)$.

4.6 Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un conjunto $\mathcal{M}$. Supóngase que la intersección de todos los elementos de $\mathcal{F}$ es vacía. Comprobar que entonces $\mathcal{M}$ es infinito y que el filtro de los subconjuntos cofinitos de $\mathcal{M}$ está contenido en $\mathcal{F}$.

4.7 Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre el conjunto $\mathcal{M}$. Comprobar que si Y es un elemento del ultrafiltro $\mathcal{U}$ que se escribe como una unión $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$, en la que cada Y_i es un subconjunto de $\mathcal{M}$, entonces algún Y_i pertenece a $\mathcal{U}$.

4.8 Demostrar que la intersección de todos los subconjuntos de un ultrafiltro es a lo sumo un punto y que en el caso en que sea un punto el ultrafiltro es principal.

4.9 Sea $\mathcal{U}$ un filtro sobre el conjunto $\mathcal{M}$. Comprobar que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro si y sólo si $\mathcal{U}$ es maximal en la familia de todos los filtros de $\mathcal{M}$ con el orden $\leq$ definido en la demostración del lema 1.4.3.

4.10 Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre el conjunto infinito $\mathcal{M}$. Demostrar que $\mathcal{U}$ no es principal si y sólo si contiene al correspondiente filtro de las partes cofinitas.

4.11 Demostrar que todo ultrafiltro que contenga a una intersección finita de filtros contiene a alguno de ellos.

4.12 Sea $\{F_i\}_{i\in\mathcal{M}}$ una familia de cuerpos en la que todos los F_i coinciden con un mismo cuerpo F. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\mathcal{M}$ y $K = \prod_{i\in\mathcal{M}} F_i/\mathcal{U}$. Identifíquese F con las clases en $\prod_{i\in\mathcal{M}} F_i/\mathcal{U}$ de los elementos diagonales para ver a K como una extensión de F. Comprobar que si dicha extensión es propia entonces K/F es una extensión trascendente pura.

4.13 Sea $\{D_i\}_{i\in\mathcal{M}}$ una familia de anillos de división y $R = \prod_{i\in M} D_i$. Para cada $x = (x_i)$ defínase $Z(x) = \{i \in \mathcal{M} : \ x_i = 0\}$ y denótese por $\bar{x}$ al elemento de R cuyas coordenadas $\bar{x}_i$ están dadas del siguiente modo:

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \ i \in Z(x) \\ 1 & \text{si } \ i \notin Z(x) \end{cases}$$

Comprobar que para cualesquiera $x, y \in R$ se verifica $Z(x) \cap Z(y) = Z(\bar{x} + \bar{y} - \bar{x}\bar{y})$. Demostrar la equivalencia de las siguientes afirmaciones: (i) $Z(x) \subset Z(y)$, (ii) existe algún $u \in R$ tal que $ux = y$, (iii) existe algún $v \in R$ tal que $xv = y$. Obtener de aquí que todo ideal izquierdo o derecho es bilátero.

4.14 (Kochen) Sea $\{D_i\}_{i\in\mathcal{M}}$ una familia de anillos de división y $R = \prod_{i\in\mathcal{M}} D_i$. Para cada x de R, denótese como en el ejercicio anterior por $Z(x)$ al conjunto $\{i \in \mathcal{M} : \ x_i = 0\}$. Mostrar que para todo ideal propio $\mathfrak{a}$ de R la familia $Z(\mathfrak{a})$ de subconjuntos de $\mathcal{M}$ dada por $Z(\mathfrak{a}) = \{Z(x) : \ x \in \mathfrak{a}\}$ constituye un filtro de $\mathcal{M}$. Demostrar que Z es una biyección del conjunto de los ideales propios de R al de los filtros sobre $\mathcal{M}$ que conserva las inclusiones. Mostrar que por dicha aplicación los ideales principales (resp. maximales) se transforman en filtros principales (resp. maximales).

4.15 Demostrar que $\mathbb{Q}$ puede sumergirse en un ultraproducto de cuerpos finitos.

4.16 Sea $\{F_i\}_{i\in\mathcal{M}}$ una familia de cuerpos, $k \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{U}$ el ultrafiltro principal

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{M} : \ k \in U\}.$$

Demostrar que

$$F_k \cong \prod_{i\in\mathcal{M}} F_i/\mathcal{U}$$

4.17 Demostrar que todo cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.

4.18 Usar el lema de Zorn para dar una demostración directa del corolario 1.4.6.

4.19 (A. Robinson) Demostrar que cualquier anillo, no necesariamente conmutativo, pero sin divisores de cero no nulos y que sea subanillo de un producto directo de anillos de división, es necesariamente subaillo de algún anillo de división.