Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga

# Ejercicios de álgebra[1]
# Cuarto curso (2003/04)

## Relación 18.
## Anillos y módulos graduados. Filtraciones

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1]Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

# 18 Anillos y módulos graduados

18.1 Sea $A = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$ un anillo graduado y $M$ un $A$-módulo graduado. Sea $A_+ = \bigoplus_{i\geq 1} A_i$ y supóngase que $A_+M = 0$. Mostrar que $M = 0$.

18.2 Sea $A$ un anillo graduado y $\mathfrak{a}$ un ideal de $A$. Demostrar que $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo si y sólo si admite algún sistema de generadores formado por elementos homogéneos.

18.3 Sea $\mathfrak{p}$ un ideal homogéneo del anillo graduado $A$. Demostrar que $\mathfrak{p}$ es primo si y sólo si la relación $ab \in \mathfrak{p}$, para $a$ y $b$ elementos homogéneos de $A$, implica $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$.

18.4 Comprobar que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo del anillo graduado $A$ entonces el ideal $\mathfrak{p}^\star$ engendrado por los elementos homogéneos de $\mathfrak{p}$ es también primo.

18.5 Mostrar que los ideales primos minimales de anillos graduados son homogéneos.

18.6 El radical de un ideal homogéneo, ¿es homogéneo?

18.7 Sea $F$ un cuerpo y $A = F[[X_1, \ldots, X_n]]$. Sea $\mathfrak{m}$ el ideal generado por las $n$ indeterminadas. Mostrar que el anillo graduado $G_{\mathfrak{m}}(A)$ es isomorfo al anillo de polinomios $F[X_1, \ldots, X_n]$.

18.8 Sea $A$ un anillo, $z$ un elemento de $A$ y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $A$ tal que $\mathfrak{p} \subset Az$, siendo estricta dicha inclusión. Mostar que entonces $\mathfrak{p} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(Az)^n$. Usar esto para demostrar que si $A$ es noetheriano local y no dominio de integridad se tiene entonces que todo ideal primo principal de $A$ es minimal.

18.9 Sea $A$ un anillo noetheriano, $\mathfrak{p}$ un ideal de $\operatorname{Ass} A$. Demostrar que existe algún entero $m > 0$ tal que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A/\mathfrak{a})$. [Indicación. Considerar en primer lugar el caso en que $A$ es local y el ideal primo dado coincide con el único ideal maximal $\mathfrak{m}$].