Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 11.
Anillos y módulos de longitud finita

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1]Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

11 Anillos y módulos de longitud finita

11.1 Sea χ una característica de Euler–Poincaré definida en una clase de A-módulos y

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta tal que χ está definida en cada uno de los M_i. Demostrar que

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \chi(M_i) = 0.$$

11.2 Sea χ una característica de Euler–Poincaré definida en una clase Γ de A-módulos. Supóngase que

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$$

es una cadena de A-submódulos tales que cada M_i/M_{i+1} pertenece a Γ. Entonces $M \in \Gamma$ y se verifica

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(M_i/M_{i+1}).$$

11.3 Sea $M \neq 0$ un A-módulo en el que cada uno de los elementos de $\operatorname{End}_A A$ es nilpotente o inversible. Demostrar que M es indescomponible. Mostrar que en el caso en que M es de longitud finita dicha propiedad caracteriza a los A-módulos indescomponibles.

11.4 Sea M un A-módulo y N un submódulo suyo tal que M/N es de longitud finita. Sea $a \in A$ tal que la aplicación de multiplicación $\gamma_a : M \longrightarrow M$ es inyectiva y el A-módulo $M/(a)M$ de longitud finita. Demostrar que entonces $N/(a)N$ es también de longitud finita y se satisface además la igualdad

$$l(N/(a)N) = l(M/(a)M).$$

11.5 Sea M un A-módulo no nulo. Se dice que es *simple* si sus únicos submódulos son 0 y el total. Se dice que es *completamente reducible* cuando admite por sumando directo a cada uno de sus submódulos.

(a) Demostrar que un A-módulo no nulo es completamente reducible si y sólo si es suma directa de submódulos simples. [Indicación. Para ver que el módulo completamente reducible M se escribe como suma directa de submódulos simples, empezar demostrando que cualquier submódulo no nulo N de M contiene algún submódulo simple. Para ello considerar un elemento no nulo x de N y un submódulo T de Ax maximal entre los submódulos que no contienen a x. Sea T' un submódulo de M tal que $M = T \oplus T'$. Mostrar que $Ax \cap T'$ es módulo simple].

(b) Comprobar que un A-módulo completamente reducible tiene longitud finita si y sólo si es finitamente generado.