Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 3.
El lema de Nakayama y sus consecuencias

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1] Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

3 El lema de Nakayama y sus consecuencias

3.1 Sea A un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal de A contenido en el radical de Jacobson, M un A-módulo y N un A-módulo de generación finita. Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de anillos tal que el homomorfismo inducido $\bar{f} : M/\mathfrak{a}M \longrightarrow N/\mathfrak{a}N$ es suprayectivo. Comprobar que entonces f es también suprayectivo.

3.2 Sea $\mathfrak{a} \neq 0$ un ideal finitamente generado del anillo A. Supóngase que $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$ y demuéstrese la existencia de algún idempotente no nulo en el ideal $\mathfrak{a}$.

3.3 Sea A un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal propio de A, $\mathfrak{b}$ un ideal de tipo finito de A. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) Existe $a \in \mathfrak{a}$ tal que $(1-a)\mathfrak{b} = 0$.

(b) Es válida la inclusión $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

3.4 Sean M y N módulos finitamente generados sobre un anillo local A. Demostrar que $M \otimes_A N = 0$ si y sólo si $M = 0$ ó $N = 0$ [Indicación. Tener en cuenta que para A-modulos arbitrarios M y N y cualquier ideal $\mathfrak{a}$ se tiene $(M \otimes_A N)/\mathfrak{a}(M \otimes_A N) \cong M/\mathfrak{a}M \otimes_{A/\mathfrak{a}} N/\mathfrak{a}N$].

3.5 Sea A un anillo local de ideal maximal $\mathfrak{m}$, M y N A-módulos finitamente generados y f y g homomorfismos de M a N. Supóngase que f es un isomorfismo y que $g(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}N$. Demostrar que $f + g$ es un isomorfismo.

3.6 Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A tal que para todo A-módulo finitamente generado M para el que se verifica $\mathfrak{a}M = M$ dicha condición implica $M = 0$. Mostrar que $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Rad} A$.

3.7 Sea $\mathfrak{a}$ un ideal finitamente generado del anillo A, a un elemento del radical de Jacobson tal que $\mathfrak{a} \subset (a)$. Supóngase que $\mathfrak{a} : (a) = \mathfrak{a}$. Demostrar que entonces $\mathfrak{a} = 0$.

3.8 Dar otra demostración del lema de Nakayama suponiendo que el módulo M del enunciado fuera no nulo, y considerando un sistema de generadores $\{v_1, \dots, v_n\}$ minimal y escribiendo $v_n = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ con cada $a_i \in \mathfrak{a}$, llegar a contradicción.

3.9 Sea A un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal de A y M un A-módulo finitamente generado. Demostrar que

$$\mathrm{r}(\operatorname{Ann}(M/\mathfrak{a}M)) = \mathrm{r}(\operatorname{Ann}(M) + \mathfrak{a})$$

3.10 Sea A un anillo local y P un A-módulo proyectivo finitamente generado. Demostrar que P es libre. [Indicación. Sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de

A y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un sistema de generadores minimal de M. Tensorizar con $A/\mathfrak{m}$ una sucesión exacta del tipo

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} A^n \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0,$$

con g el epimorfismo que transforma cada e_i de la base canónica en el correspondiente x_i].

3.11 Sea M un A-módulo finitamente generado tal que $\mathfrak{m}M = M$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Mostrar que $M = 0$. Demostrar a partir de esto el lema de Nakayama.

3.12 Sea A un anillo, $n \geq 1$ un entero. Probar que cada subconjunto de n generadores de A^n es una base de dicho A-módulo. Demostrar que todo conjunto de generadores tiene por lo menos n elementos.

3.13 Sean P y P' módulos proyectivos finitamente generados sobre el anillo A. Sea $\mathcal{R}$ el radical de Jacobson de A. Supóngase que $P'/\mathcal{R}P' \cong P/\mathcal{R}P$. Demostrar que $P \cong P'$.

3.14 Una *presentación* de un A-módulo M es una sucesión exacta

$$F_2 \to F_1 \to M \to 0$$

en la que F_2 y F_1 son módulos libres. Si además F_2 y F_1 son de tipo finito se dice entonces que la sucesión exacta es una *presentación finita* del A-módulo M, y de M se dice que es de *presentación finita*. Mostrar que todo A-módulo tiene alguna presentación. Comprobar que el A-módulo M es de presentación finita si y sólo si existe una sucesión exacta del tipo

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

donde K es de tipo finito y F es libre finitamente generado. Demostrar que todo A-módulo proyectivo de tipo finito es de presentación finita. Los cocientes de módulos de presentación finita, ¿son de presentación finita?

3.15 Sea A un anillo local, $\mathfrak{m}$ su ideal maximal y F su cuerpo residual. Sea M un A-módulo de presentación finita. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) M es libre.

(b) M es proyectivo.

(c) M es plano.

(d) La tensorización de la inclusión $i : \mathfrak{m} \longrightarrow A$ es una aplicación inyectiva de $\mathfrak{m} \otimes M$ a $A \otimes M$.

(e) $\mathrm{Tor}_1^A(F, M) = 0$.

[Indicación. Para la demostración de (d)$\Rightarrow$(a) considerar un epimorfismo $g : F' \longrightarrow M$ para un cierto A-módulo libre de generación finita F'. Sea $E = \ker g$. Mostrar que $\mathrm{Id} \otimes g$ es isomorfismo, al ser $F \otimes_A F'$ y $F \otimes_A M$ F-espacios vectoriales de la misma dimensión. Obtener $F \otimes E = 0$ y $E = 0$.]