Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 6.
Extensiones normales.

9 de diciembre de 2009.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

6. Extensiones normales

6.1 Sea K/F una extensión de cuerpos tal que $K = F(S)$ y siendo $[F(x) : F] \leq 2$ para todo $x \in S$. Demostrar que K/F es una extensión normal.

6.2 Sea K/F una extensión normal y E un cuerpo intermedio de dicha extensión. Demostrar que E/F es normal si y sólo si $\sigma(E) \subset E$ para todo F-automorfismo σ de K.

6.3 Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ es una extensión normal de $\mathbb{Q}$ y que cada una de las raíces del polinomio irreducible $X^4 - 2X^2 + 9$ genera a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ sobre $\mathbb{Q}$.

6.4 Sean K/F y L/F extensiones normales y finitas. Comprobar que existe alguna F-inmersión $\sigma : K \longrightarrow L$ si y sólo si hay dos polinomios f y g de $F[X]$ con $f \mid g$ tal que K es cuerpo de descomposición de f y L cuerpo de descomposición de g.

6.5 ¿Existe algún automorfismo del cuerpo A de los números algebraicos que transforma $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$?

6.6 Sea K/F una extensión algebraica. Demostrar que K/F es una extensión normal si y sólo si para todo $x \in K$ existe algún subcuerpo E de K que contiene a x y que constituye una extensión finita y normal de F.

6.7 Sea $\mathcal{U}$ la clase de todos los cuerpos. Demostrar que la clase de las extensiones normales satisface la segunda de las condiciones dadas en la definición de clase $\mathcal{U}$-distinguida de extensiones.

6.8 Sea $f(X)$ un polinomio irreducible de $\mathbb{Q}[X]$ que tiene raíces reales y no reales y K el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$. Demostrar que el grupo de Galois de la extensión $K/\mathbb{Q}$ no es abeliano y comprobar que la hipótesis de irreducibilidad no puede suprimirse.

6.9 Sea K/F una extensión normal y $f(X)$ un polinomio irreducible de $F[X]$. Supóngase que g y h son polinomios mónicos irreducibles de $K[X]$ que son factores de f. Demostrar que existe algún F-automorfismo σ de K tal que $g^\sigma = h$. Dar un ejemplo de una extensión que no sea normal y en la que no se tenga un resultado de este tipo.

6.10 Sea K/F una extensión algebraica de cuerpos. Demostrar que la extensión es normal si y sólo si los factores irreducibles en $K[X]$ de cada polinomio irreducible de $F[X]$ tienen el mismo grado.