Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 9.
Teorema de los ceros

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1]Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

9 Teorema de los ceros

9.1 Sea F un cuerpo algebraicamente cerrado. Demostrar que el conjunto de los ideales maximales de $F[X_1, \ldots, X_n]$ coincide con el de aquéllos que son del tipo $(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$.

9.2 Sea F un cuerpo algebraicamente cerrado y S un subconjunto de $F[X_1, \ldots, X_n]$. Comprobar que existe alguna raíz común a todos los polinomios del conjunto S si y sólo si el ideal generado por dicho conjunto es propio.

9.3 Sea A un anillo noetheriano, B una A-álgebra de generación finita y G un grupo finito de automorfismos de dicha A-álgebra. Sea B^G el conjunto de todos los elementos de B que quedan fijos por cada uno de los automorfismos de G. Mostrar que la A-álgebra B^G es de generación finita.

9.4 Sea K un anillo finitamente generado (esto es, finitamente generado como $\mathbb{Z}$-álgebra) que es un cuerpo. Demostrar:

(a) La característica de K es prima.

(b) K es un cuerpo finito.

9.5 Demostrar que toda álgebra A finitamente generada sobre un cuerpo F, que tiene un único ideal primo, es finito-dimensional.

9.6 Sea F un cuerpo, A y B F-álgebras, con B de generación finita y $f : A \to B$ un homomorfismo de F-álgebras. Demostrar que para todo ideal maximal $\mathfrak{n}$ de B el ideal $f^{-1}(\mathfrak{n})$ es también maximal.

9.7 (Teorema de los ceros, forma débil en caso no numerable) Sea F un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal infinito no numerable y K un cuerpo que es extensión de F y está finitamente generado como F-álgebra. Demostrar que $K = F$ argumentando por reducción al absurdo de la siguiente manera: suponer $t \in K$ con $t \notin F$ y considerar el conjunto

$$S = \left\{ \frac{1}{t-a} \ : \ a \in F \right\}$$

mostrando que los elementos de S son F-linealmente independientes; llegar entonces a contradicción comprobando que la dimensión de K como F-espacio vectorial es a lo sumo numerable.

9.8 Sea F un cuerpo, B una F-álgebra de generación finita y A una subálgebra de B. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de B. Comprobar que $\mathfrak{m} \cap A$ es un ideal maximal de A.

9.9 Sea A un dominio de integridad y $\mathfrak{q}$ un ideal primo de $A[X]$ tal que $\mathfrak{q} \cap A = 0$. Demostrar que $\mathfrak{q} = 0$. [Indicación. Mostrar primero la validez del enunciado en el caso en que A es un cuerpo].

9.10 Sea A un anillo y $\mathfrak{q}$ un ideal primo de $A[X]$. ¿Qué puede decirse del ideal $\mathfrak{q} \cap A$?

9.11 Usar el ejercicio anterior para demostrar que, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal del anillo A, su extensión $\mathfrak{q}$ es un ideal primo minimal de $A[X]$.

9.12 Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de un anillo de polinomios en n indeterminadas $F[X_1, \ldots, X_n]$ y con coeficientes en un cuerpo F. Demostrar que $\mathfrak{m}$ puede generarse por n elementos.

9.13 Sea K un cuerpo y A un subanillo de K. Mostrar que el cuerpo de cocientes F de A puede identificarse a un subcuerpo de K. Supóngase que K es finitamente generado como A-módulo. Descomponiendo K como suma directa de F y un cierto F-subespacio suplementario W, muéstrese que F es finitamente generado como A-módulo. Pruébese que $A = F$.

9.14 Sea K un cuerpo, A un subanillo de K y F un subcuerpo de K que coincide con el cuerpo de cocientes de A. Supóngase que $K = A[x_1, \ldots, x_n]$ con cada $x_i \in K$ algebraico sobre F. Mostrar que existe un $s \in A$, $s \neq 0$ para el que K es un $A[1/s]$-módulo finitamente generado. Usando el ejercicio anterior probar que $F = A[1/s]$. Demostrar que s pertenece a todo ideal primo no nulo de A.

9.15 (a) Sea K/F una extensión de cuerpos tal que $K = F[x_1, \ldots, x_n]$. Demostrar que los x_i son algebraicos sobre F razonando por reducción al absurdo, formando un subconjunto S maximal entre los subconjuntos de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ que son algebraicamente independientes, comprobando que en $F[S]$ la intersección de todos los ideales maximales es (0) y aplicando el ejercicio anterior.

(b) Mostrar que en el álgebra de polinomios $F[X_1, \ldots, X_n]$ todo ideal maximal es de codimensión finita sobre F.

9.16 (a) Sea A un anillo noetheriano en el que para toda A-álgebra finitamente generada B y cualquier ideal maximal $\mathfrak{m}$ de B se tiene que $B/\mathfrak{m}$ está finitamente generado como A-módulo. Demostrar que todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de una A-álgebra finitamente generada B es intersección de los ideales primos $\mathfrak{q}$ de B que lo contienen y para los que $B/\mathfrak{q}$ es de generación finita como A-módulo. [Indicación. Mostrar que basta comprobar la veracidad de la afirmación en el caso en que A es dominio de integridad y $\mathfrak{p}$ coincide con el ideal cero. En el supuesto que éste sea el caso, tomar la imagen inversa por el homomorfismo canónico de un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de B_x para mostrar que para todo elemento no nulo x de B existe algún ideal primo $\mathfrak{q}$ de B que no lo contiene].

(b) Usar el apartado anterior para demostrar que todo anillo de polinomios $F[X_1, \ldots, X_n]$ con coeficientes en un cuerpo F es un anillo de Jacobson.

9.17 Sea A un subanillo del anillo B. Supóngase que B es un cuerpo, que es de generación finita como A-álgebra.

(a) Demostrar que existe entonces algún elemento $s \in A,\ s \neq 0$ tal que A_s es un cuerpo y B es extensión finita de A_s.

(b) Supóngase L un cuerpo algebraicamente cerrado y $f : A \longrightarrow L$ un homomorfismo tal que $f(s) \neq 0$, para s un elemento en las condiciones del apartado anterior. Mostrar la existencia de algún homomorfismo $g : B \longrightarrow L$ que extiende a f.

(c) Mostrar que, si además A es un anillo de Jacobson, entonces A es un cuerpo y B es una extensión finita de A.

9.18 Sea A un anillo. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(a) A es de Jacobson.

(b) Cualquier A-álgebra B de generación finita, que sea un cuerpo, está también finitamente generada como A-módulo.

[Indicación. Para demostrar (b)$\Rightarrow$(a), considerar $B = A/\mathfrak{p}$ para $\mathfrak{p}$ un ideal primo no maximal de A y un elemento $x + \mathfrak{p}$ de $B = A/\mathfrak{p}$ que es distinto de la clase cero. Descartar el caso en que $B_{x+\mathfrak{p}}$ es un cuerpo y mostrar la existencia de algún ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A tal que $x \notin \mathfrak{m}$.]

9.19 Sea A un anillo de Jacobson y B una A-álgebra finitamente generada. Demostrar que B es anillo de Jacobson.