Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 10.
Descomposición primaria

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1]Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

10 Descomposición primaria

10.1 Sea A un anillo, $\mathfrak{q}$ un ideal primario de A y $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ dos ideales tales que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{q}$. Demostrar que $\mathfrak{a} \subset \mathrm{r}(\mathfrak{q})$ o $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{q}$.

10.2 Describir las descomposiciones primarias irreducibles de los ideales propios de $\mathbb{Z}$.

10.3 Sea F un cuerpo y $A = F[X, Y, Z]/(XY - Z^2)$. Sea x (resp. z) la clase de X (resp. Z). Mostrar que $\mathfrak{p} = (x, z)$ es un ideal primo de A y que $\mathfrak{p}^2$ no es primario.

10.4 Dar $\operatorname{Ass} M$ para el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z} \oplus [\mathbb{Z}/(3)]$.

10.5 Sea F un cuerpo y $A = F[X, Y]$. Dar una descomposición primaria irredundante del ideal (X^2, XY) de A.

10.6 Mostrar que en un anillo noetheriano la condición de que para un ideal $\mathfrak{a}$ se tenga que $\mathrm{r}(\mathfrak{a})$ sea primo no implica el carácter primario de $\mathfrak{a}$.

10.7 Sea A un anillo noetheriano, $M \neq 0$ un A-módulo finitamente generado y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Comprobar que $\mathfrak{a}$ contiene algún elemento que no es divisor de cero para M o $\mathfrak{a}$ está constituido por divisores de cero de algún elemento no nulo de M.

10.8 Sea A un anillo noetheriano, x un elemento de A que no es ni divisor de cero ni inversible. Demostrar que para todo entero $n \geq 1$ se tiene

$$\operatorname{Ass}_A(A/xA) = \operatorname{Ass}_A(A/x^nA).$$

10.9 Mostrar que existen ideales primarios de anillos noetherianos que no son potencias de ideales maximales.

10.10 Sea A un anillo noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A que consta únicamente de divisores de cero de M. Mostrar que existe algún $x \in M$, $x \neq 0$ tal que $\mathfrak{a}x = 0$.

10.11 Sea A un anillo noetheriano, $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia de A-módulos. Supóngase que $M = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha$ es un A-módulo finitamente generado. Demostrar que $\operatorname{Ass} M = \bigoplus \operatorname{Ass} M_\alpha$.

10.12 Sea A un anillo noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Supóngase que M_1 y M_2 son submódulos de M tales que $M = M_1 + M_2$. ¿ Se verifica $\operatorname{Ass} M = \operatorname{Ass} M_1 \cup \operatorname{Ass} M_2$?

10.13 Sea $M \neq 0$ un A-módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano A. Demostrar que existe entonces alguna cadena de submódulos

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$$

tal que cada cociente M_i/M_{i+1} es isomorfo a algún A-módulo del tipo $A/\mathfrak{p}_i$, con los $\mathfrak{p}_i$ ideales primos de A. Obtener de aquí que $\operatorname{Ass} M$ es finito.

10.14 Demostrar que los ideales maximales del anillo total de fracciones de un anillo noetheriano constituyen un conjunto finito.

10.15 Sea A un anillo noetheriano, M un A-módulo de generación finita, S un subconjunto multiplicativo de A y $\iota : A \longrightarrow S^{-1}A$ el homomorfismo canónico. Demostrar que

$$\operatorname{Ass}_{S^{-1}A} S^{-1}M = \{\iota_S(\mathfrak{q})S^{-1}A : \ \mathfrak{q} \in Ass_A M \text{ y } \mathfrak{q} \cap S = \emptyset\}$$

10.16 Sea A un anillo noetheriano, M y N A-módulos finitamente generados. Demostrar que $\operatorname{Hom}(M, N)$ es también finitamente generado y que

$$\operatorname{Ass}\operatorname{Hom}_A(M, N) = \operatorname{Sop} M \cap N.$$

[Indicación. Para establecer la igualdad anterior considerar primero en el caso de un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$. Utilizar alguna de las consecuencias del lema de Nakayama para comprobar que $\mathfrak{m}$ pertenece a $\operatorname{Ass}\operatorname{Hom}_A(M, N)$ si y sólo si está en $\operatorname{Sop} M \cap N$]

10.17 Sea A un anillo noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Demostrar que si $\mathfrak{a}$ es un ideal tal que todo elemento de $\operatorname{Sop} M$ contiene a $\mathfrak{a}$, existe entonces algún entero $n > 0$ tal que $\mathfrak{a}^n M = 0$.

10.18 Sea A un anillo noetheriano y $\mathfrak{a}$ un ideal de A tal que $\operatorname{Sop}(A/\mathfrak{a})$ consta únicamente de ideales maximales. Demostrar que $\mathfrak{a}$ se escribe de modo único como un producto finito de ideales primarios.

10.19 (I. Kaplansky) Sea A un anillo noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Sea S_0 el subconjunto de A de los elementos que están en el anulador de algún elemento no nulo de M. Sea $\mathcal{T}$ la familia de pares del tipo $(\mathfrak{p}, x)$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal en el conjunto de los ideales que son anuladores de elementos de M y $x \in M$ es tal que $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} x$. Sea N el submódulo generado por los elementos que aparecen como segunda componente en $\mathcal{T}$ y $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ la familia de ideales que aparecen como primera componente de pares de $\mathcal{T}$ asociados con un sistema finito de generadores $x_1, \ldots, x_r$ de N. Mostrar que $S_0 = \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$, y así que S_0 es unión finita de ideales primos.