Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 9.
Teorema del elemento primitivo.

10 de diciembre de 2009.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

9. Teorema del elemento primitivo

9.1 Sea F un cuerpo infinito y K/F una extensión finita y propia del cuerpo F. Demostrar que el grupo $K^\star/F^\star$ es infinito.

9.2 Sea K/F una extensión separable de grado finito n. Demostrar que si $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ son las distintas inmersiones de K en una clausura algebraica de dicho cuerpo que inducen la identidad sobre F y si $x \in K$ es tal que $\sigma_i(x) \neq \sigma_j(x)$ para $i \neq j$, entonces x es un elemento primitivo de la extensión.

9.3 Sea K/F una extensión de cuerpos tal que $K = F(x_1, \ldots, x_n)$ y con cada x_i con cuadrado en F. Suponer F de característica distinta de 2 y $[K : F] = 2^n$. Demostrar que $x = x_1 + \cdots + x_n$ es un elemento primitivo de la extensión.

9.4 Sea K/F una extensión algebraica de cuerpos tal que $K = F(x_1, \ldots, x_n, y)$, con cada x_i separable sobre F. Comprobar que la extensión K/F es monógena.

9.5 Sea Ω/F una extensión separable. Supóngase que cualquier polinomio irreducible $h \in F[X]$ tiene alguna raíz en Ω. Demostrar que Ω es una clausura algebraica de F.

9.6 Sea K/F una extensión finita y separable de un cuerpo infinito. Supongamos que $x, y \in K$ son tales que $K = F(x, y)$. Sean $f(X)$ y $g(X)$ los polinomios irreducibles de x e y. Supongamos que

$$\begin{aligned} f(X) &= \prod_{i=1}^{n}(X - x_i) \qquad x_1 = x \\ g(X) &= \prod_{j=1}^{m}(X - y_j) \qquad y_1 = y \end{aligned}$$

son descomposiciones de f y g en una clausura algebraica de K. Tómese $c \in F$, $c \neq 0$ y distinto de cada uno de los elementos $(y_j - y)/(x - x_i)$, $(i \neq 1)$. Sea $z = y + cx$ y $h(X) = g(z - cX)$. Demostrar que el máximo común divisor de f y h en $F(z)[X]$ es $X - x$. Obtener de aquí el teorema del elemento primitivo.

9.7 Sea K/F una extensión separable y $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de subcuerpos de K que son extensiones finitas de F y tales que $K_0 = F$ y $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = K$. Demostrar que $[K : F] = 2^{\aleph_0}$. Obtener de aquí el resultado del ejercicio 0. 3.