Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra
Cuarto curso (2003/04)

Relación 13.
Dependencia en retículos de cambio

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

13 Dependencia en retículos de cambio

13.1 Demostrar que un conjunto parcialmente ordenado L es un retículo completo si y sólo si posee un elemento máximo y existen los ínfimos de todos los subconjuntos de L.

13.2 Sea L un conjunto parcialmente ordenado respecto a la relación $\leq$. Un subconjunto no vacío S de L se dice que es un *ideal* si se satisfacen las dos condiciones siguientes: *i)* para todo $x \in S$ y cualquier elemento y de L tal que $y \leq x$, se tiene $y \in S$; *ii)* si S' es un subconjunto de S que tiene algún supremo en L, dicho supremo pertenece a S.

(a) Comprobar que, para todo $x \in L$, el conjunto (x), de los elementos y de L tales que $y \leq x$, es un ideal.

(b) Adjuntar a L un menor elemento, en caso que fuera necesario, y demostrar que el conjunto $\hat{L}$ de los ideales de L es un retículo completo.

(c) Demostrar que existe una inmersión $i : L \longrightarrow \hat{L}$ que conserva los supremos y los ínfimos que existan en L.

13.3 En un retículo L se dice que *existen los complementos relativos* cuando para cualesquiera $b,\ c,\ d \in L$ tales que $c \leq d \leq b$ existe algún $d' \in L$ para el que se verifica $d \vee d' = b,\ d \wedge d' = c$. Demostrar que en todo retículo de cambio existen los complementos relativos.

13.4 Sea Ω un conjunto arbitrario. Una relación $\preceq$ de Ω en el conjunto de sus partes $\mathcal{P}ar(\Omega)$ se dice que es una *relación de dependencia* en el conjunto Ω si se satisfacen las condiciones siguientes:

(a) $x \preceq S$ cuando $x \in S$;

(b) Si $x \preceq S$, existe entonces un subconjunto finito S_0 de S tal que $x \preceq S_0$;

(c) (Axioma de transitividad). Si $x \preceq S$ y si T es un subconjunto de Ω tal que $s \preceq T$ para todo $s \in S$, entonces $x \preceq T$.

(d) (Axioma de intercambio). Si $x \preceq S$ e $y \in \Omega$ es tal que $x \not\preceq S - \{y\}$, entonces $y \preceq (S - \{y\}) \cup \{x\}$

Sea $(L, \leq)$ un retículo de cambio y Ω el conjunto de sus átomos. Comprobar, que definiendo la relación $\preceq$ por $p \preceq A$ si y sólo si $p \leq \bigvee A$, se obtiene una relación de dependencia del conjunto Ω.

13.5 Sea $\preceq$ una relación de dependencia en un conjunto Ω (ver ejercicio precedente). Sea $S \subset \Omega$. Si existe algún elemento s del conjunto S para el que se tiene $s \preceq S - \{s\}$, se dice entonces que S es *dependiente*. En caso contrario se llama *independiente*. Demostrar que si S es un subconjunto independiente y $x \not\preceq S$ para algún $x \in S$, entonces $S \cup \{x\}$ es un subconjunto independiente que contiene estrictamente a S.

13.6 Sea $\preceq$ una relación de dependencia en el conjunto Ω. Para cada $S \subset \Omega$, denótese por $[S]$ el subconjunto constituido por los elementos $y \in \Omega$ para los que $y \preceq S$. Sea $\mathfrak{L}$ la familia de los subconjuntos de Ω que son del tipo $[S]$ para algún $S \subset \Omega$. Demostrar que $\mathcal{L}$ es un retículo de cambio respecto a la relación de inclusión.

13.7 Sea $\preceq$ una relación de dependencia en un conjunto Ω y $S \subset \Omega$. Se dice que S *genera* Ω si $x \preceq S$ para todo $x \in \Omega$. A todo subconjunto que genera a Ω y que es independiente se llama *base* de Ω. Demostrar que todo subconjunto independiente de Ω puede extenderse a una base.