Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 7.
Extensiones separables.

10 de diciembre de 2009.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

7. Extensiones separables

7.1 Sea a un elemento de una extensión de $\mathbb{Z}/(3)$. Demostrar que el polinomio $X^3 - 2a$ de coeficientes en $(\mathbb{Z}/(3))(a)$ no es separable.

7.2 Sea F un cuerpo de característica 2. Demostrar que los cuerpos que son extensión cuadrática y separable de F coinciden con los cuerpos del tipo $F(x)$ para x raíz de un polinomio de $F[X]$ que se escribe en la forma $X^2 + X + a$.

7.3 Demostrar que no existen extensiones separables de grado de separabilidad numerable.

7.4 Si K/F es una extensión separable, ¿se satisface siempre la igualdad $[K : F]_s = [K : F]$?

7.5 La clausura normal de una extensión separable, ¿es necesariamente separable?

7.6 Demostrar que un cuerpo F de característica p es perfecto si y sólo si su endomorfismo de Frobenius $\varphi : x \mapsto x^p$ es suprayectivo.

7.7 Sea K/F una extensión algebraica de cuerpos. Comprobar que si F es perfecto entonces K también lo es. Demostrar que, en el caso en que K/F es extensión finita, el cuerpo F es perfecto si y sólo si lo es el cuerpo K.

7.8 Sea p un primo positivo y F un cuerpo de característica p. Supóngase que $\varphi : F \longrightarrow F$ es el endomorfismo de Frobenius. Hágase $F_0 = \bigcap_{n\geq 0} \operatorname{Im} \varphi^n$. Compruébese que F_0 es un cuerpo perfecto y que cualquier subcuerpo perfecto de F está contenido en F_0.

7.9 Sea p un primo positivo, F un cuerpo de característica p y K un cuerpo que es extensión de F. Demostrar que para todo elemento x de K que sea algebraico sobre F existe algún entero $n \geq 0$ tal que x^{p^n} es separable sobre F.

7.10 Sea F un cuerpo de característica prima p, K/F una extensión de cuerpos y $x \in K$ un elemento algebraico de la extensión. Demostrar que x es separable sobre F si y sólo si $F(x) = F(x^p)$.

7.11 Sea $\mathcal{U}$ la clase de todos los cuerpos. Demsotrar que la clase de las extensiones separables es una clase $\mathcal{U}$-distinguida de extensiones.

7.12 Sea K/F una extensión algebraica. Comprobar que los elementos de K que son separables sobre F constituyen un subcuerpo K_s de K tal que K_s/F es una extensión separable. A K_s se llama *clausura separable* de F en K. Mostrar que para todo cuerpo intermedio E de la extensión K/F tal que E/F sea separable se tiene $E \subset K_s$.

7.13 Demostrar que para todo cuerpo F existe algún cuerpo Ω, que es extensión separable de F y está determinado de manera única salvo F-isomorfismos por la propiedad de que para todo cuerpo K tal que K/F sea separable exista siempre alguna F-inmersión de K en Ω.

7.14 Sea F un cuerpo y f un polinomio mónico irreducible de $F[X]$, de grado estrictamente mayor que 1, que tiene todas sus raíces coincidentes en una clausura algebraica de F. Demostrar que la característica de F es un primo $p > 0$ y que $f(X) = X^{p^n} - a$ para algún $a \in F$ y cierto entero $n \geq 0$.

7.15 Sea K/F una extensión de cuerpos y p un primo estrictamente positivo. Supóngase que F tiene por característica p y que x es un elemento algebraico de la extensión. Demostrar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) $[F(x) : F]_s = 1$.

b) Existe algún entero $n \geq 0$ tal que $x^{p^n} \in F$.

c) El polinomio irreducible de x sobre F es del tipo $X^{p^n} - a$ para algún entero $n \geq 0$ y $a \in F$.

De un elemento algebraico x para el que se satisfacen las condiciones anteriores se dice que es un elemento *puramente inseparable* de la extensión.

7.16 Sea K/F una extensión de cuerpos, x e y elementos algebraicos de K. Suponer que x es separable e y puramente inseparable. Demostrar que $F(x, y) = F(x + y)$.

7.17 Sea F un cuerpo de característica no nula. La extensión algebraica K/F se dice que es *puramente inseparable* cuando lo es cada uno de sus elementos. Supóngase que K/F es una extensión algebraica y que S es un subconjunto de K tal que $K = F(S)$. Demostrar que la extensión K/F es puramente inseparable si y sólo si cada uno de los elementos de S es puramente inseparable sobre F.

7.18 Sea $\mathcal{U}$ la clase de todos los cuerpos. Comprobar que la clase de las extensiones puramente inseparables es una clase distinguida de extensiones.

7.19 Sea F un cuerpo de característica prima, K/F una extensión algebraica y K_s la clausura separable de F en K. Muéstrese que K/K_s es una extensión puramente inseparable.

7.20 Sea K/E una extensión normal y E/F una extensión puramente inseparable. Mostrar que K/F es normal.

7.21 Comprobar que para la clausura separable K_s de una extensión finita K/F se satisface la igualdad $[K_s : F] = [K : F]_s$.

7.22 Sea F un cuerpo de característica prima y K/F una extensión algebraica. Comprobar la existencia de un cuerpo intermedio K_i de la extensión K/F tal que K_i/F es puramente inseparable y contiene a cualquier otro cuerpo intermedio E que sea extensión purametne inseparable de F. Mostrar que la intersección de K_i con la clausura separable de F en K coincide con el cuerpo F. Comprobar que K/K_i es una extensión separable si y sólo si el cuerpo K coincide con el menor subcuerpo $K_s \vee K_i$ que contiene a K_s y K_i.

7.23 Sea K/F una extensión normal, K_i su clausura puramente inseparable. Demostrar que K/K_i es separable.

7.24 Sea F un cuerpo, $f \in F[X]$ un polinomio irreducible y separable y K un cuerpo que es cuerpo de descomposición de f sobre F. Suponer que la extensión K/F es abelina. Demostrar que $F(x) = K$ para cada una de las raíces x de f en K.