Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 20.
El criterio de Galois sobre solubilidad.

1 de junio de 2014.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

20. El criterio de Galois sobre solubilidad

20.1 Sea F un cuerpo de característica cero. Demostrar que para todo entero positivo n el polinomio de $F[X]$ dado por la igualdad

$$f(X) = X^{4n} + aX^{3n} + bX^{2n} + cX^n + d$$

tiene grupo de Galois soluble.

20.2 Mostrar que toda extensión finita de un cuerpo finito es una extensión radical.

20.3 Mostrar que si F es un cuerpo finito y $f \in F[X]$ un polinomio no constante, entonces la ecuación $f(x) = 0$ es soluble por radicales, aunque tales radicales pueden ser de orden mayor que el grado del polinomio.

20.4 Sea K/F una extensión normal de grado 3 y

$$F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = L$$

una torre radical tal que $K \subset L$. Supóngase que el grado $[F_m : F_{m-1}]$ es un número primo p_m y que K no está contenido en F_{m-1}. Demostrar que entonces $p_m = 3$ y F_m/F_{m-1} es una extensión normal.

20.5 Sea $H \neq \{Id\}$ un subgrupo normal de un grupo transitivo de transformaciones G del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Comprobar que todas las órbitas tienen el mismo número de elementos, y por consiguiente, si $n = p$ es un número primo entonces H es transitivo.

20.6 Sea p un primo positivo, H un subgrupo del grupo L de las transformaciones de $\mathbb{Z}/(p)$ de la forma $x \mapsto ax + b$, $a \neq 0$ y que contiene a todas las traslaciones. Mostrar que las traslaciones distintas de la identidad son las únicas transformaciones pertenecientes a H que no tienen punto fijo y consiguientemente los únicos elementos de H que son p-ciclos.

20.7 Sea G un grupo de transformaciones en $\mathbb{Z}/(p)$ que contiene a un subgrupo H como el del ejercicio anterior como subgrupo normal. Demostrar que G es un subgrupo de L. [Indicación. Sea $\tau : x \mapsto x + 1$ y $\eta \in G$. Por el ejercicio anterior, $\eta\tau\eta^{-1} : x \mapsto x + k$. Así, $\eta(x + 1) = \eta(x) + k$, de donde se obtiene $\eta x \mapsto kx + b$.]

20.8 Sea G un subgrupo transitivo del grupo de permutaciones S_p, siendo p primo. Suponer que todo elemento de G distinto de la identidad deja fijo a lo más a un elemento y que p divide a $|G|$. Demostrar que G es isomorfo a un subgrupo de L que contiene a todas las traslaciones y que, por consiguiente, es soluble.

20.9 Usar inducción el ejercicio 20. 6 para demostrar que cada subgrupo soluble y transitivo de S_p (p primo) es equivalente a un subgrupo de L conteniendo al subgrupo de las traslaciones.

20.10 (Galois). Sea $f(X) \in F[X]$ un polinomio irreducible de grado un primo p sobre un cuerpo F de característica cero y K el cuerpo de descomposición de $f(X)$ sobre F. Demostrar que $f(x) = 0$ es soluble por radicales si y sólo si $K = F(x_i, x_j)$ para cualesquiera dos raíces distintas x_i y x_j de $f(X)$.