Departamento de Álgebra,
Geometría y Toplogía.
Universidad de Málaga

Ejercicios de álgebra[1]
Cuarto curso (2003/04)

Relación 15.
Bases de trascendencia

Profesor de la asignatura:

José Antonio Cuenca Mira

[1]Los anillos serán siempre supuestos conmutativos y unitarios, salvo mención expresa en sentido contrario. Asimismo, se supondrá que los homomorfismos entre ellos conservan las unidades. Además, a través de esta serie de relaciones de ejercicios, los anillos se supondrán no nulos, si bien este hecho se recalcará explícitamente en algunos lugares.

15 Bases de trascendencia

15.1 Sean L/K y K/F extensiones de cuerpos. Demostrar que

$$\operatorname{tr}\deg_F L = \operatorname{tr}\deg_F K + \operatorname{tr}\deg_K L.$$

15.2 Sea F_0 el cuerpo primo de un cuerpo F. Demostrar que si el grado de trascendencia de F sobre F_0 es a lo sumo numerable entonces F es numerable.

15.3 Demostrar la existencia de algún automorfismo de $\mathbb{C}$ que transforma $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$.

15.4 (a) Sea K/F una extensión de cuerpos. Supóngase $K = F(S)$, donde S es un subconjunto de K en el que cada dos elementos distintos son algebraicamente dependientes. Comprobar que $\operatorname{tr}\deg_F K \leq 1$.

(b) Sea

$$F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots$$

una torre de subcuerpos de un cuerpo dado. Supóngase que $\operatorname{tr}\deg_F F_n = 1$ para todo entero $n \geq 1$. Demostrar que para el subcuerpo $L = \bigcup_{n\geq 0} F_n$ se tiene $\operatorname{tr}\deg_F L = 1$.

15.5 Sean K/F y L/F extensiones de cuerpos. Supóngase que $\operatorname{tr}\deg_F K \leq \operatorname{tr}\deg_F L$ y que L es algebraicamente cerrado. Demostrar que existe alguna inmersión de K en L que deja fijo a cada uno de los elementos de F.

15.6 Demostrar que dos cuerpos algebraicamente cerrados de la misma característica son isomorfos si y sólo si tienen el mismo grado de trascendencia sobre sus cuerpos primos.

15.7 Sea F un cuerpo algebraicamente cerrado que tiene grado de trascendencia infinito sobre su cuerpo primo F_0, $\mathfrak{p}$ un ideal primo del anillo de polinomios $F[X_1, \ldots, X_n]$ y f un polinomio de dicho anillo que no está en $\mathfrak{p}$. Mostrar la existencia de un subconjunto finito S de F y un ideal primo $\mathfrak{p}'$ de $F_0(S)$ de modo que $f \in F_0(S)[X_1, \ldots, X_n]$ y teniéndose que $\mathfrak{p}$ coincide con la extensión de $\mathfrak{p}'$ en $F[X_1, \ldots, X_n]$. Sea F_1 el cuerpo de fracciones del anillo $A = F_0(S)[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{p}'$. Mostrar la existencia de alguna $F_0(S)$-inmersión de F_1 en el cuerpo F. Comprobar que si $(a_1, \ldots, a_n) \in F^n$ es tal que cada a_i es transformado de $X_i + \mathfrak{p}'$, se tiene entonces $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ y $h(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $h \in \mathfrak{p}$. Demostrar que $\mathfrak{p}$ es la intersección de todos los ideales del tipo $(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$, con $(x_1, \ldots, x_n)$ variando en el conjunto de los elementos de F^n que son raíces de cada uno de los polinomios de $\mathfrak{p}$, siendo de Jacobson el anillo de polinomios $F[X_1, \ldots, X_n]$.

15.8 Sea $\mathcal{U}$ la clase de todos los cuerpos. Demostrar que la clase de las extensiones de cuerpos de grado de trascendencia finito constituyen una clase $\mathcal{U}$-distinguida de extensiones.