

1.– Dotar de estructura de variedad diferenciable al espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 1$.

2.– Sea X el cuadrado en $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| = 1\}.$$

Dotar a X de estructura de variedad diferenciable de dimensión 1.

3.– Demostrar que toda variedad diferenciable es conexa si y solo si es arcoconexa.

4.– Dar un ejemplo de estructura diferenciable en S^1 distinta de la usual.

5.– (a) Sea $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ la compactación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$. Probar que la aplicación $\varphi: \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ dada por

$$\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|^2} \quad \text{si } x \neq 0, \infty, \quad \varphi(0) = \infty, \quad \varphi(\infty) = 0$$

es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ tal que $\varphi^2 = Id$. Probar que

$$\{(\mathbb{R}^n, Id), (\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} - \{0\}, \varphi)\}$$

es un atlas diferenciable sobre $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

(b) Demostrar que S^n y $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ son variedades difeomorfas.

6.– (a) Demostrar que la aplicación $B(0; a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$x \mapsto \frac{ax}{\sqrt{a^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

es un difeomorfismo de la bola abierta de centro 0 y radio a sobre todo $\mathbb{R}^n$.

(b) Dada M variedad diferenciable de dimensión n , demostrar que cada punto $p \in M$ admite una carta (U, φ) tal que $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$ (en particular, cada punto de M admite un entorno difeomorfo a todo $\mathbb{R}^n$).

7.– Sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación continua. Demostrar que f es diferenciable si y solo si las funciones $g \circ f: f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables para todo V abierto de N y para toda $g \in C^\infty(V)$.

8.– Demostrar que una aplicación $f: M \rightarrow N_1 \times N_2$ es diferenciable si y solo si lo son las proyecciones $f_i: M \rightarrow N_i$, $i = 1, 2$.

9.– Probar que la proyección canónica $S^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^n$ es diferenciable