1.– Sea M una variedad diferenciable compacta.
(a) Demostrar que toda submersión $f\colon M \to N$, con N conexa, es sobreyectiva.
(b) Deducir que no existen submersiones de variedades compactas en $\mathbb{R}^n$.
(c) Probar que si $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ es una inmersión, entonces $\dim M \leq n-1$.

2.– Demostrar que dado un subespacio P de una variedad diferenciable M, existe a lo sumo una única estructura diferenciable que hace de P subvariedad de M.
[*Indicación*: comprobar que dadas dos tales estructuras en P, entonces la identidad en P es un difeomorfismo.]

3.– Demostrar que el cuadrado de $\mathbb{R}^2$

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x| + |y| = 1\}.$$

no admite ninguna estructura diferenciable que lo haga subvariedad regular de $\mathbb{R}^2$.

4.– (a) Sea $P \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ un polinomio homogéneo en n variables, es decir cumpliendo

$$P(tx_1, ..., tx_n) = t^m P(x_1, ..., x_n).$$

Probar que el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $P(x) = a$ es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$, para todo $a \neq 0$. Demostrar que todas las subvariedades obtenidas con $a > 0$ son difeomorfas entre si, y lo mismo ocurre con las obtenidas con $a < 0$.
[*Indicación*: Usar la identidad de Euler para polinomios homogéneos:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = mP$$

para probar que 0 es el único valor crítico de P.]
(b) Aplicar el ejercicio anterior para describir algunas subvariedades de $\mathbb{R}^n$.
(c) Demostrar que $SL(n;\mathbb{R}) = \{A \in L(n;\mathbb{R}) \,/\, det\, A = 1\}$ es una subvariedad regular de $L(n;\mathbb{R})$ de dimensión $n^2 - 1$.

5.– Sea $f\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f([x_1, x_2, x_3]) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$, donde $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, y $[x_1, x_2, x_3]$ denota su clase en $\mathbb{R}P^2$.
(a) Demostrar que f es diferenciable.
(b) Calcular sus puntos y valores críticos y regulares. ¿Para qué valores de a es $f^{-1}(a)$ una subvariedad regular de $\mathbb{R}P^2$?

6.– *Teorema (débil) de inmersión de Whitney.* Demostrar que toda variedad diferenciable M es subvariedad de algún $\mathbb{R}^m$. (el Teorema de Whitney afirma además que siempre se puede tomar $m = 2\dim M$).
[*Indicación*: Supóngase, como de hecho ocurre, que toda variedad posee un atlas finito $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^k$ y tómese un refinamiento $\{V_i\}_{i=1}^k$ con $\overline{V}_i \subset U_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Se definen entonces aplicaciones diferenciables, $i = 1, \ldots, k$,

$$h_i \colon M \to \mathbb{R}^n, \qquad h_i(p) = \begin{cases} f_i\varphi(p), & \text{si } p \in U_i, \\ 0, & \text{si } p \notin \operatorname{Sop} f_i, \end{cases}$$

donde $n = \dim M$ y cada $f_i \colon M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $0 \leq f_i \leq 1$, $f_i = 1$ en U_i y $\operatorname{Sop} f_i \subset U_i$. Considérese entonces la aplicación

$$f \colon M \to \mathbb{R}^{(n+1)k}, \qquad f = (h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_k),$$

y pruébese que es una inmersión y un homeomorfismo sobre su imagen.]