

- 1.– (a) Sean M y N variedades diferenciables. Encontrar un isomorfismo explícito,

$$T_{(p,q)}(M \times N) \xrightarrow{\cong} T_p(M) \times T_q(N), \quad p \in M, q \in N.$$

- (b) Sea T^n el toro de dimensión n . Comprobar que todo punto $p \in T^n$ puede escribirse como $p = (p_1, \dots, p_n)$ con $p_i \in \mathbb{C}$, $\|p_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$. Demostrar que,

$$T_p T^n \cong \langle ip_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle ip_n \rangle.$$

- 2.– (a) Sean (U, φ) y (V, ψ) cartas de M en torno a p . Escribamos $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ y $\psi = (y_1, \dots, y_n)$. Demostrar que

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p,$$

donde

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_i}(p) = \frac{\partial x_j \circ \psi^{-1}}{\partial y_i}(\psi(p)).$$

- (b) Sea (V, ψ) la carta de S^2 dada por $V = S^2 - \{(x, 0, z) \in S^2, x \geq 0\}$ y el homeomorfismo $\psi: V \xrightarrow{\cong} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$,

$$\psi^{-1}(\rho, \theta) = (\cos \rho \cos \theta, \cos \rho \sin \theta, \sin \rho).$$

Considérese asimismo (U, φ) , $\varphi = (u, v)$, cualquiera de las proyecciones estereográficas. Para cada punto $p \in V$ determinar $\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)_p$, $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p$ en función de $\left(\frac{\partial}{\partial u} \right)_p$, $\left(\frac{\partial}{\partial v} \right)_p$.

- 3.– Sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable tal que $(df)_p$ es la aplicación nula para todo $p \in M$. Probar que f es constante en cada componente conexa de M .
- 4.– Sea $f: M \rightarrow N$ diferenciable y $a \in \text{Im } f$ valor regular. Considérese la subvariedad de M dada por $P = f^{-1}(a)$. Demostrar que para cada $q \in P$,

$$(di)_q(T_q P) = \text{Ker } (df)_q.$$

Como quiera que $(di)_q$ es inyectiva, es usual identificar $T_q P$ con su imagen $(di)_q(T_q P)$ como subespacio de $T_q M$.

- 5.- Sea P^r subvariedad de M^n (denotemos $i: P \hookrightarrow M$) y sea $p \in P$. Demostrar que existen cartas de p en P y M respectivamente tales que, respecto de las correspondientes bases $\{(\frac{\partial}{\partial y_i})_p\}_{i=1}^r$ y $\{(\frac{\partial}{\partial x_j})_p\}_{j=1}^n$ de T_pP y T_pM se tiene,

$$(di)_q\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \quad i = 1, \dots, r.$$

- 6.- *El fibrado tangente.* Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Definimos,

$$TM = \dot{\cup}_{p \in M} T_pM.$$

Definimos asimismo la proyección

$$\pi: TM \rightarrow M, \quad \pi(\xi) = p \quad \text{si} \quad p \in T_pM.$$

Para cada carta (U, φ) del atlas maximal de M consideramos la aplicación

$$\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \quad \tilde{\varphi}(\xi) = (\varphi(\pi\xi), (v_1, \dots, v_n))$$

donde $\xi = \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\pi(\xi)}$.

A continuación,

se dota a TM de la topología que hace que cada $\tilde{\varphi}$ sea un homeomorfismo, esto es, $\theta \subset TM$ es abierto si $\tilde{\varphi}(\theta \cap \pi^{-1}U)$ es abierto de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ para cualquier carta (U, φ) del atlas maximal de M .

- Demostrar que efectivamente, cada $\tilde{\varphi}$ es una aplicación biyectiva.
- Probar que con esta topología $\pi^{-1}(W)$ es abierto de TM para cualquier abierto W de M .
- Demostrar que TM es ANII y Hausdorff.
- Si $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es un atlas de M , demostrar que $\{(\pi^{-1}(U_i), \tilde{\varphi}_i)\}_{i \in I}$ es un atlas de TM que lo dota de estructura diferenciable de dimensión $2n$.
- Demostrar que la proyección $\pi: TM \rightarrow M$ es diferenciable.