1.– Comprobar que dado X campo en M y $f, g \in C^\infty(M)$, se verifica que

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

2.– Si $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, se define el *gradiente* de f, como el campo de vectores sobre $\mathbb{R}^n$,

$$grad\,\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Asimismo, dado un campo $X = f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y} + h\frac{\partial}{\partial z}$ sobre $\mathbb{R}^3$, se llama *rotacional* de X al campo

$$rot\ X = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Se define también la *divergencia* de X como la función diferenciable

$$div\ X = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Demostrar que $rot\ (grad\ \phi) = 0$ y $div\ (rot\ X) = 0$ para cualquier $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ y X campo en $\mathbb{R}^3$.

3.– Sea $f: M \to N$ diferenciable y X, Y campos en M y N respectivamente. Diremos que X e Y están f-relacionados si, para cada $p \in M$,

$$df_p\big(X(p)\big) = Y\big(f(p)\big).$$

(a) Demostrar que si X e Y están f-relacionados, entonces, para cada $g \in C^\infty(N)$ se tiene que

$$X(g \circ f) = Y(f) \circ f.$$

(b) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Demostrar que el campo $X = \frac{d}{dt}$ en $\mathbb{R}$ está f-relacionado con el campo de $\mathbb{R}^2$ definido por $Y = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$.

4.– Demostrar que las curvas integrales asociadas a un campo son, o bien constantes, o bien injectivas, o bien periódicas. Probar también que en estos dos últimos casos son siempre inmersiones

5.– Calcular explícitamente el flujo de los siguientes campos en $\mathbb{R}^2$:

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

6.– Encontrar un campo diferenciable sin ceros en las esferas de dimensión impar.

7.– Sobre $S^3 = \{q \in H / \ |q| = 1\}$, donde H denota los cuaterniones, definamos

$$X_1(q) = iq \ , \ X_2(q) = jq \ , \ X_3(q) = kq.$$

Comprobar que X_1 , X_2 , X_3 son campos de vectores diferenciables sobre S^3. Calcular los flujos de estos tres campos.

8.– En S^n consideremos la carta (U, φ), $U = \mathbb{R}^n - \{(0, \ldots, 0, 1)\}$,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right)$$

Calcular el flujo del campo en U definido por $X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

9.– Demostrar que dado un campo X en M y $f \colon M \to \mathbb{R}$ diferenciable, entonces,

$$X(f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f\big(\phi_p(t)\big) - f(p)}{t}$$

siendo ϕ el flujo de X. En otros términos, $X(f)(p)$ es la derivada de f en p a lo largo de la curva integral.