

- 1.- En $\mathbb{R}^3$ se considera el campo $X = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - 3 \frac{\partial}{\partial z}$.
- (a) Calcular su flujo.
- (b) Encontrar una carta (U, φ) de $\mathbb{R}^3$, tal que $X = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}$ en U .
- 2.- Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, se define el *gradiente* de f , como el campo de vectores sobre $\mathbb{R}^n$

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Comprobar que $D_v f(p) = \langle v, (\text{grad } f)(p) \rangle$, donde $D_v f(p)$ denota la derivada direccional de f en la dirección de v en p . Si $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función diferenciable, calcular $[\text{grad } f, \text{grad } g]$.

- 3.- Estudiar si son involutivas o no las siguientes distribuciones:
- (a) En $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ la dada por $D(x) = \{v \in \mathbb{R}^3 / (x_1^2 + x_2^2)v_1 + x_3^2 v_3 = 0\}$
- (b) En $\mathbb{R}^4$ la dada por $D(x) = \{v \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 x_4 v_1 + 2x_2 x_4 v_2 + 2x_3 x_4 v_3 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)v_4 = 0\}$
- (c) En $\mathbb{R}^3$ la engendrada por los campos

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos(x_1 x_2) \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

- 4.- Sea

$$X = f \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial y} + h \frac{\partial}{\partial z}$$

un campo sobre $\mathbb{R}^3$.

- (a) Demostrar que si el campo X no tiene ceros, entonces determina la distribución $X^\perp$, que en cada punto p es el subespacio ortogonal a $X(p)$, y que esta distribución es involutiva si y solamente si

$$\langle X, \text{rot } X \rangle = 0.$$

- (b) Emplear este resultado para resolver los apartados (a) y (c) del ejercicio anterior.

- 5.- Sean $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables dadas por

$$f(x, y, z) = x, \quad g(x, y, z) = y + h(x, z)$$

siendo $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Definamos D como la distribución de $\mathbb{R}^3$ generada por los gradientes de f y g . Expresar, en función de h , una condición necesaria y suficiente para que la distribución anterior sea involutiva.