Examen de Topología General. **26 de Enero de 2015**

1. Sea X un conjunto no vacío y $x_0 \in X$. Consideremos la familia τ de subconjuntos de X formadas por el vacío y los subconjuntos $U \subset X$ tales que $x_0 \in U$.
   (a) Probar que τ es una topología en X.
   (b) Demostrar que si U es un abierto no vacío, entonces $\overline{U} = X$.
   (c) Demostrar que si F es un cerrado distinto del total entonces $\overset{\circ}{F} = \phi$.
   (d) ¿Es X Hausdorff?
   (e) ¿Es X conexo? (4)

2. Sean $f, g \colon X \to Y$ aplicaciones continuas con Y Hausdorff.
   (a) Dado $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$ demostrar que existe un abierto θ de X, con $x_0 \in \theta$ y tal que $f(x) \neq g(x)$ para cualquier $x \in \theta$.
   (b) Demostrar que si f y g coinciden en un subconjunto denso de X entonces $f = g$.
   (c) ¿Cuántas funciones $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se anulan en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$? (3)

3. Sea X un espacio topológico compacto y sea $\{F_n\}_{n \geq 0}$ una familia descendente de cerrados no vacíos ($F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$). Demostrar que $\cap_{n \geq 0} F_n$ es un subespacio compacto no vacío. (1)

4. Dar un ejemplo de aplicación continua no constante $f \colon X \to Y$ con X no arcoconexo y $f(X)$ arcoconexo. (1)

5. Dar un subespacio de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a la compactación de Alexandroff del semiplano de $\mathbb{R}^2$
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0\}. \qquad (1)$$