Examen de Topología General. **3 de Febrero de 2016**

1. Consideremos la familia τ de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ formada por:

$$\tau = \{\phi, \mathbb{R}^2\} \cup \{A_k\}_{k\in\mathbb{R}} \qquad \text{donde} \qquad A_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y > k\}.$$

   (a) Probar que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ es un espacio topológico.
   (b) ¿Es $(\mathbb{R}^2, \tau)$ compacto?
   (c) ¿Es $(\mathbb{R}^2, \tau)$ conexo?
   (d) ¿Es $(\mathbb{R}^2, \tau)$ Hausdorff?
   (e) Dado el círculo $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$, calcular su interior y su adherencia.

   (4)

2. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Demostrar que la función $f : X \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in A \\ 1, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

   es continua si y solo si A es a la vez abierto y cerrado. (1,5)

3. Demostrar que $X \times Y$ es un espacio arcoconexo si y solo si lo son X e Y. (1,5)

4. Sea X un conjunto infinito dotado de la topología de los complementos finitos (los abiertos son el vacío y los subconjuntos de X cuyo complemento es finito). Demostrar que X es compacto. (1,5)

5. Sea X un espacio normal. Demostrar que dados dos cerrados disjuntos F y G existen abiertos $U \supset F$, $V \supset G$ tales que $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$. (1,5)