1. Sea d una distancia en X. Demostrar que las aplicaciones

$$\delta_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \qquad \delta_2(x,y)=\min\{1,d(x,y)\},$$

son distancias para las que X es acotado (recordemos que un espacio métrico es acotado si existe $\operatorname{Sup}\{d(x,y),\ x,y\in X\}$).

2. ¿Cuáles de las siguientes aplicaciones definen una distancia?:
   (a) $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad d(x,y)=|x^p-y^p|, \quad p\in\mathbb{N}$.
   (b) $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, n\geq 2, \quad d(x,y)=\min_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$.

3. Dos distancias definidas sobre un conjunto son equivalentes si dan lugar a la misma familia de abiertos (esto es, al mismo espacio topológico como veremos más adelante).
   (a) Demostrar que (X,d) y (X,d') son equivalentes si y sólo si dado una bola abierta $B(x;r)$ del primer espacio existe otra del segundo $B'(x;s)$ tal que $B'(x;s)\subset B(x;r)$ (y viceversa).
   (b) Probar que en $\mathbb{R}^n$ las siguientes distancias son equivalentes:

$$d(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\Big)^{1/2}$$
$$d(x,y)=\max_{i=1,\dots,n}|x_i-y_i|$$
$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

   (c) En $\mathbb{R}^2$, ¿Qué forma tienen las bolas abiertas de cada una de estas distancias?
   (d) Demostrar que las distancias d y δ_1 del problema 1 son también equivalentes. ¿Son d y δ_2 del problema 1 distancias equivalentes?

4. Determinar los abiertos del espacio métrico discreto sobre un conjunto X.

5. Dado (X,d) un espacio métrico, podemos dotar a cualquier subconjunto $A\subset X$ de estructura de espacio métrico con la distancia d. Lo denotamos (A,d) y se le llama *subespacio métrico con la distancia inducida.* Dado $a\in A$ y $r>0$ denotamos por $B_A(a;r)$ a la bola abierta de centro a y radio r del subespacio métrico (A,d). Esto es,

$$B_A(a;r)=\{x\in A,\ d(x,a)<r\}.$$

   (a) Demostrar que $B_A(a;r)=B(a;r)\cap A$.

(b) Demostrar que un subconjunto $C \subset A$ es abierto de (A, d) si y solo si $C = U \cap A$ con U abierto de (X, d).

6. En $\mathbb{R}^2$ consideramos el subespacio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(3, 0)\}$. Indicar cuáles de los siguientes subconjuntos son abiertos o cerrados de X:
   - Una bola abierta contenida en X.
   - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   - El punto $\{(3, 0)\}$.