Problemas de Topología General. **Relación 1**

1. Sea X un conjunto no vacío y $x_0 \in X$. Consideramos la familia τ de subconjuntos de X formada por X y aquellos subconjuntos $\Theta \subset X$ tales que $x_0 \notin \Theta$. Demostrar que τ es una topología en X (*topología del punto excluido*) y caracterizar los cerrados.
2. Sea (X, τ) un espacio topológico.
   (a) Probar que para cualquier subconjunto $A \subset X$ se verifica que $\overline{A}^c = (A^c)^o$.
   (b) ¿Es cierto en general que $\overline{A^c} = \overline{A}^c$?
   (c) Demostrar que los subconjuntos $A^o, \mathrm{Fr}(A), (A^c)^o$ constituyen una partición de X.
   (d) Probar que $\mathrm{Fr}\,(A) = \phi$ si y sólo si A es a la vez abierto y cerrado.
3. Calcular el interior, la adherencia y la frontera de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:
   (a) $A = \{(x, y);\ y = 0\}$.
   (b) $B = \{(x, y);\ x > 0,\ y \neq 0\}$.
   (c) $C = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
   (d) $D = \{(x, y);\ x > 0,\ y \leq 1/x\}$.
   (e) La gráfica de la función $f(x) = \sin(1/x)$, $x > 0$.
4. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio topológico X es convergente y tiene por límite x_0 si dado U entorno de x_0 existe un natural n_0 tal que $x_m \in U$ par $m \geq n_0$.
   (a) Probar que si el espacio es Hausdorff, entonces el límite de una sucesión, caso de existir, es único.
   (b) Encontrar un contraejemplo a lo anterior caso de no ser X Hausdorff.
   (c) Caracterizar las sucesiones convergentes en un espacio topológico discreto y en la topología del punto excluido.
5. Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:
   (a) D es un subconjunto denso de X.
   (b) Si F es un cerrado tal que $D \subset F \subset X$, entonces $F = X$.
   (c) El complementario de D tiene interior vaco.
6. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x_0 \in X$. Una familia $\{V_i\}_{i \in I}$ de entornos de x_0 se dice que es una *base de entornos de* x_0 si dado cualquier entorno U de x_0 existe un elemento de esa familia V_j tal que $V_j \subset U$. Demostrar que:
   (a) Si $\mathcal{B}$ es una base de τ, entonces la familia $\{B \in \mathcal{B},\ x_0 \in B\}$ es una base de entornos abiertos de x_0.
   (b) Si cada punto $x \in X$ tiene una base de entornos abiertos $\mathcal{F}_x$, entonces la familia $\mathcal{B} = \cup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ es una base de τ.
   (c) En $\mathbb{R}^n$ todo punto posee una base de entornos abiertos numerable.