

1. (a) Dada una aplicación $f: X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos, probar que los siguientes enunciados son equivalentes:
 - (i) f es continua.
 - (ii) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para cualquier subconjunto $A \subset X$.
 - (iii) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ para cualquier subconjunto $B \subset Y$.
 (b) Demostrar que si f es además biyectiva, entonces f es homeomorfismo si y solo si $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
2. (a) Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua y abierta. ¿Es cierto que $f(A^\circ) = f(A)^\circ$ para cualquier $A \subset X$?
 (b) Probar que una aplicación $f: X \rightarrow Y$ es abierta si y solo si $f(A^\circ) \subset f(A)^\circ$ para cualquier $A \subset X$.
3. Encontrar un criterio que caracterice las aplicaciones continuas $f: X \rightarrow X$ con X un conjunto infinito dotado de la topología de los complementos finitos.
4. Sea $(X, \leq)$ un conjunto no vacío totalmente ordenado. Consideremos la familia τ de subconjuntos de X formada por el vacío y los subconjuntos U de X verificando la siguiente propiedad: si $y \in U$ y $x \leq y$ entonces $x \in U$.
 - (a) Probar que τ es una topología en X .
 - (b) Demostrar que las aplicaciones continuas $f: X \rightarrow X$ son precisamente los morfismos de orden.
5. (a) Sea Y un espacio Hausdorff y $f, g: X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas que coinciden en un subconjunto denso de X . Demostrar que entonces $f = g$.
 (b) ¿Cuántas funciones continuas $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se anulan en $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$?
6. (a) Demostrar que si una aplicación $f: X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos es continua entonces: dada una sucesión $\{x_n\}$ con límite x_0 , la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$.
 (b) Probar que el recíproco no es cierto en general.
7. Demostrar que la esfera de dimensión n menos un punto $S^n - \{p\}$ y $\mathbb{R}^n$ son espacios topológicos homeomorfos.
8. Demostrar que la corona circular de $\mathbb{R}^2$,

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ r^2 < x^2 + y^2 < R^2\},$$
 y el cilindro de $\mathbb{R}^3$,

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2 + y^2 = 1\},$$
 son espacios topológicos homeomorfos.