Problemas de Topología General. **Relación 3**

1. Sea X el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{0\} \times [0,1] \cup \{1\} \times [0,1]$$

Consideramos en X la menor relación de equivalencia $\mathcal{R}$ para la que $(0,0) \sim (1,0)$ y $(0,1) \sim (1,1)$. Demostrar que $X/\mathcal{R}$ es homeomorfo a S^1.

2. (a) Dado $A \subset X$, Probar que, en general, la proyección canónica $p\colon X \to X/A$ no es una aplicación abierta ni cerrada.

   (b) Demostrar que si A es abierto (respectivamente cerrado), entonces $p\colon X \to X/A$ es abierta (respectivamente cerrada).

   (c) En cualquiera de los casos del apartado anterior probar que

$$X - A \cong X/A - [a], \qquad a \in A.$$

3. Encontrar un ejemplo de un espacio Hausdorff X y un subconjunto $A \subset X$ de forma que el espacio cociente X/A no sea Hausdorff.

4. Dados $A \subset X$, $B \subset Y$,demostrar:

   (a) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

   (b) $(A \times B)^o = A^o \times B^o$.

   (c) $A \times B$ es denso en $X \times Y$ si y sólo si A es denso en X y B es denso en Y.

5. (a) Demostrar que, en general, las proyecciones $p_Y\colon Y \times Z \to Y$, $p_Z\colon Y \times Z \to Z$ no son aplicaciones cerradas.

   (b) Demostrar que una aplicación $f\colon X \to Y \times Z$ es continua si y sólo si lo son las composiciones $p_Y \circ f\colon X \to Y$, $p_Z \circ f\colon X \to Z$.

   (c) Dada $f : X \times Y \to Z$ una aplicación continua, demostrar que, para cada $y \in Y$, la aplicación $f_y : X \to Z$, $f_y(x) = f(x,y)$, es continua. Probar además que el recíproco no es cierto.

6. (a) Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Se llama *grafo de* f al subespacio de $X \times Y$,

$$G(f) = \{\big(x, f(x)\big),\ x \in X\}.$$

   (a) Demostrar que f es continua si y sólo si la aplicación

$$h : X \to G(f), \quad h(x) = \big(x, f(x)\big)$$

   es un homeomorfismo.

   (b) Probar que si f es continua e Y es Hausdorff, entonces $G(f)$ es cerrado de $X \times Y$