1. Consideremos en el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ la siguiente topología,
$$\tau = \big\{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\big\}.$$
   (a) Hallar las componentes conexas de X.

   (b) Estudiar si el subespacio $A = \{b, d, e\}$ es conexo.

2. Demostrar que $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es conexo (respectivamente arcoconexo) si y sólo si lo es cada X_i, $i = 1, \ldots, n$.

3. Demostrar que $\mathbb{R}^3 - S^2$ no es conexo y calcular las componentes conexas. ¿Son éstas también las componentes arcoconexas?

4. (a) Demostrar que S^n no es homemorfo a S^1, $n \geq 2$.

   (b) Demostrar que el espacio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto numerable. Demostrar que $\mathbb{R}^n - A$ es arcoconexo.

6. (a) Sea $C \subset X$ un subespacio conexo que contiene puntos de A y de A^c. Demostrar que entonces $C \cup Fr(A) \neq \phi$.

   (b) Demostrar que dado $n \geq 1$ toda curva en S^n que una los polos ha de cortar necesariamente al ecuador. (El *ecuador* de la esfera S^n es el subespacio formado por los puntos con última coordenada nula, que es obviamente homeomorfo a S^{n-1})

7. Demostrar que el espacio $X \subset \mathbb{R}^2$ dado por
$$X = \{(x, \sin \tfrac{1}{x}),\ x \in (0, 1]\} \cup \{(0, x),\ x \in [-1, 1]\}$$
   es un espacio conexo pero no arcoconexo.

8. Un espacio topológico se dice que es *localmente conexos* si cada punto tiene una base de entornos conexos.

   (a) Dar ejemplos de espacios conexos y no localmente conexos y de espacios localmente conexos y no conexos.

   (b) Demostrar que las componentes conexas de un espacio localmente conexo son abiertas.

   (c) Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación continua con X localmente conexo. ¿Es $f(X)$ localmente conexo?.

9. Demostrar que el espacio peine menos el origen $(0, 0)$ es conexo y no arcoconexo.

10. Demostrar que el subespacio del $\mathbb{R}^2$ formado por aquellos puntos con al menos una coordenada racional es arcoconexo.