1. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua con X compacto. Demostrar que f está acotada y que alcanza máximo y mínimo.

2. (a) Demostrar que cualquier subconjunto infinito de un espacio compacto posee puntos de acumulación.

   (b) Demostrar que cualquier sucesión acotada de $\mathbb{R}$ admite alguna subsucesión convergente.

3. (a) Demostrar que la unión finita de subespacios compactos es compacta.

   (b) Demostrar que la intersección arbitraria de subespacios compactos de un espacio Hausdorff es compacta.

4. Demostrar que no existe ninguna aplicación continua e inyectiva $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$.

5. En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas reales de orden 2 definimos la topología para la que la biyección natural de $M_2(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^4$ sea un homeomorfismo. Consideramos los subespacios de $M_2(\mathbb{R})$:

$$X = \{A \in M_2(\mathbb{R}), \quad A^t.A = I\},$$

$$Y = \{A \in M_2(\mathbb{R}), \quad |A| = \pm 1\}.$$

   Obsérvese que $X \subset Y$. ¿Son compactos estos subespacios?

6. (a) Dar un subespacio de $\mathbb{R}$ homeomorfo a la compactación de Alexandroff de $\mathbb{N}$.

   (b) Dibuja en $\mathbb{R}^2$ un subespacio homeomorfo a la compactación de Alexandroff de p intervalos semiabiertos disjuntos de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$.

   (c) Dibuja en $\mathbb{R}^2$ un subespacio homeomorfo a la compactación de Alexandroff de p intervalos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}$, $p \geq 1$.