1. Probar que un espacio topológico X es Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta(X) = \{(x,x),\, x \in X\}$ es un cerrado de $X \times X$.

2. *Ejemplo de espacio Hausdorff no regular.* En $\mathbb{R}$ consideramos la siguiente familia de subconjuntos:
$$\widehat{\tau} = \tau \cup \{\mathbb{Q} \cup \theta,\ \theta \in \tau\}$$
donde τ es la topología usual en $\mathbb{R}$.
   (a) Demostrar que $\widehat{\tau}$ es una topología y que $(\mathbb{R}, \widehat{\tau})$ es Hausdorff.
   (b) Demostrar que $(\mathbb{R}, \widehat{\tau})$ no es regular (*Indicación*: Véase que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es un cerrado en $\widehat{\tau}$ y que no puede separarse por abiertos de ningún punto).

3. (a) Demostrar que todo subespacio de un espacio regular es regular.
   (b) Demostrar que el producto de un nmero finito de espacios no vacíos es regular si y sólo si lo es cada uno de ellos.

4. Demostrar que todo espacio compacto Hausdorff es normal.

5. Demostrar que todo subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

6. Sea F cerrado de un espacio normal X.
   (a) Demostrar que toda aplicación continua $f\colon F \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, se extiende a X.
   (b) Demostrar que toda aplicación continua $g\colon F \to S^n$, $n \geq 1$, se extiende a un abierto U que contiene a F.

7. Demostrar que todo espacio conexo y normal con más de un punto es no numerable (*Indicación*: Utilizar el Lema de Urysohn).

8. *Ejemplo de espacio regular no normal.* Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}^2$,
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$$
con la topología τ que tiene por base a los abiertos de la topología usual inducida por $\mathbb{R}^2$ junto con los conjuntos
$$B\big((x,y);y\big) \cup \{(x,0)\}, \quad (x,y) \in A.$$
   (a) Demostrar que (A,τ) es regular.
   (b) ¿ Qué topología induce τ en el eje x?
   (c) Demostrar que (A,τ) no es normal comprobando que los cerrados $\mathbb{Q} \times \{0\}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \times \{0\}$ no pueden separarse por abiertos.