Curso de Topología General

Francisco J. Díaz y José M. García Calcines

VISION NET

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

Curso de Topología General

Curso de Topología General

VISION NET

Curso de Topología General

Avenida de Asturias s/n impares local 5
Semiesquina a Plaza Castilla 3
28029 Madrid (España)
Tel: 0034 91 3117696
url: www.visionlibros.com
ISBN: 978-84-9770-895-1

Producido por Grupo Corporativo Visionnet.
Cuatro Amigos 5 Posterior 28029 Madrid (España)

Impreso por Publidisa

Índice

PREFACIO

Cuando un matemático comenta a qué se dedica, tras la habitual expresión de sorpresa suele venir un comentario del tipo ”vaya, pues sí que debes ser bueno con los números...”. Y no es extraño, porque lo cierto es que hasta hace poco las matemáticas se ocupaban casi en exclusiva de problemas relacionados con las cantidades, tratando las propiedades cualitativas, no dependientes de las magnitudes pero que permiten sin embargo diferenciar objetos entre sí, como una simple curiosidad.

La *Topología* es la parte de las matemáticas que se ocupa de este tipo de propiedades que hemos dado en llamar cualitativas. El siguiente párrafo es la introducción del artículo en el que el gran matemático Leonard Euler da la solución del famoso problema de los Puentes de Königsberg en 1726, y que consiste en dar una condición necesaria y suficiente para que una gráfica pueda ser trazada con una línea continua recorriendo cada arista una sola vez. Este artículo se considera como el primer trabajo de Topología.

“*Además de esa parte de la geometría que trata de las magnitudes y que desde siempre ha sido cultivada con mucho celo, existe otra completamente desconocida hasta nuestros días, de la que Leibniz habló por primera vez y que llama “Analysis Situs”. Según él, esta parte de la geometría se ocupa de determinar solamente la posición y buscar propiedades que resulten de esta posición; en este trabajo no es necesario considerar las magnitudes por sí mismas, ni calcular; pero aún no está muy bien establecido cuáles son los problemas de este tipo que pertenecen al “Analysis Situs” y cuál es el método que hay que utilizar para resolverlos; es por lo que, cuando recientemente se me presentó un problema que parecía ligado a la geometría ordinaria, pero cuya solución no dependía de las magnitudes ni del cálculo de las cantidades, no dudé en relacionarlo* *con el "Analysis Situs", tanto por las consideraciones de posición que únicamente entran en la solución, como porque el cálculo no interviene para nada. Por tanto he creído útil expresar aquí, como un ejemplo de "Analysis Situs" el método que he encontrado para resolver los problemas de este género"*

L. Euler, 1735

Sin embargo, fue el desarrollo del cálculo infinitesimal lo que puso de manifiesto la necesidad de obtener definiciones precisas para nociones tales como cercanía o continuidad, lo cual desembocó a principios del siglo XX en la obtención del concepto de espacio topológico. En este nuevo contexto cobran su auténtico significado esas propiedades que hasta el momento habían sido tratadas de una forma vaga.

Actualmente, todas las ramas de las matemáticas están impregnadas de conceptos topológicos y, aunque éstos se presentan con diferentes formas según el contexto, es muy recomendable que cualquier matemático sepa reconocerlos e interpretarlos con los fundamentos y el lenguaje de la Topología General.

En este tratado se hace una introducción de los conceptos y propiedades básicas de la Topología, intercalando comentarios y ejemplos, principalmente geométricos, que los motiven y justifiquen de forma intuitiva. Con este esquema se pretende que un lector no iniciado en la Topología General obtenga una visión constructivista de toda la teoría, sin obviar la relación que las ideas introducidas tienen en otras ramas de las matemáticas. Se supondrá que el lector está familiarizado con los conceptos y propiedades básicas de la recta real, tales como *intervalos, valor absoluto, cotas, supremo, ínfimo, máximo, mínimo*, etc.

La materia aquí presentada puede servir como base para el desarrollo de un primer curso de Topología General, materia obligatoria en los actuales planes de estudios de matemáticas de las universidades españolas. Está desarrollada de una forma exhaustiva y detallada, aunque procurando ilustrar los conceptos introducidos con comentarios, ejemplos y contraejemplos que hagan regresar al lector a situaciones más concretas. Se ha dividido en tres bloques.

El primero consta de cuatro capítulos, y trata de los espacios topológicos en sí y cómo resuelven los principales retos que dieron lugar a su definición. En el primer capítulo se da la definición de espacio topológico así como sus primeras propiedades y construcciones asociadas. Como un ejemplo fundamental y motivador se estudia la topología asociada a un espacio métrico. En el segundo se ve cómo definir una topología en un subconjunto cualquiera de un espacio topológico. En el tercero se axiomatiza el concepto de proximidad, definiendo la continuidad de aplicaciones y la convergencia de sucesiones. En el capítulo cuarto se asocia una topología al producto cartesiano de conjuntos y al conjunto cociente por una relación de equivalencia.

El segundo gran bloque trata de las propiedades topológicas. El capítulo cinco trata de los axiomas de contabilidad y separación, cuya principal importancia radica en que los espacios que no los verifican tienen malas propiedades, principalmente en cuanto a la convergencia de sucesiones. En el capítulo seis se generaliza la idea intuitiva de que un espacio sea “de una sola pieza” de dos formas diferentes, mediante los conceptos de conexidad y conexidad por caminos. En el capítulo siete se introduce la noción de compacidad.

Por último, se presentan dos apéndices que recuerdan conceptos y resultados de la teoría de conjuntos y de espacios métricos que serán de utilidad.

Aunque la notación que se utiliza a lo largo de todo el texto se aproxima mucho a la habitual de cualquier obra de matemáticas, se aconseja al lector, sobre todo en lo referente a teoría de conjuntos y espacios métricos, que en caso de duda consulte previamente estos apéndices.

Capítulo 1

Espacios Topológicos

Este primer capítulo se centrará en el concepto de *espacio topológico*, fundamento principal de la Topología General. Se presentarán ejemplos ilustrativos, dedicando una atención especial a la topología asociada a un espacio métrico.

1.1. Definición y ejemplos

El concepto de espacio topológico nació debido a la necesidad de formalizar nociones tales como *cercanía* o *continuidad*. Los matemáticos dedicados a esta labor observaron que para hablar de proximidad en la recta real era suficiente trabajar con una familia de subconjuntos, que denominaron abiertos. Extrajeron las principales propiedades de esa familia, que son las siguientes:

- La unión arbitraria de abiertos es un abierto

- La intersección finita de abiertos es un abierto

y llegaron a la conclusión de que, dado un conjunto cualquiera, los subconjuntos que merecen ser denominados abiertos son los que verifican esas propiedades. Como estos subconjuntos permiten definir conceptos relacionados con la *forma*, llamaron *topología* ($\equiv$ ciencia de la forma) a la rama de las matemáticas que estudia los conjuntos a través de sus subconjuntos abiertos.

Además, extendieron el nombre de topología para denominar la estructura que se debe asociar a un conjunto para trabajar en este sentido.

Definición 1.1.1 Dado un conjunto X, un subconjunto T de la partes de X se dirá una *topología sobre* X cuando verifique las tres siguientes propiedades:

T1. El conjunto vacío y X pertenecen a T.

T2. Cualquier unión de elementos de T pertenece a T.

T3. Cualquier intersección de dos elementos de T pertenece a T.

Los elementos de una topología se llamarán *abiertos*. Además, si T es una topología sobre el conjunto X, se dirá que el par (X, T) es un *espacio topológico*, o simplemente que X es un espacio topológico si la topología se sobrentiende.

Cabe destacar que la propiedad T3 equivale a que la intersección finita de abiertos sea un abierto.

Ejemplo 1.1.1 Una forma de asociar una topología a cualquier conjunto X es definir $T_I = \{\emptyset, X\}$. Esta es la denominada *topología indiscreta (o trivial)*.

Ejemplo 1.1.2 Otra manera es definir la *topología discreta* por $T_D = \mathcal{P}(X)$, esto es, el conjunto de las partes de X. Es interesante el hecho de que la topología discreta es la única en la cual todos los subconjuntos unitarios son abiertos.

Las topologías anteriores suelen ser útiles a la hora de encontrar contraejemplos, pues son opuestas en el sentido de que la topología discreta tiene muchos abiertos (todos los subconjuntos de X) y la indiscreta muy pocos (sólo los que exige la definición de topología).

Ejemplo 1.1.3 Dado un conjunto X y un subconjunto $Y \subset X$, se define la *topología de superconjuntos de* Y por

$$T^Y = \{A \subset X \ / \ Y \subset A\} \cup \{\emptyset\}$$

Ejemplo 1.1.4 Fijado también un subconjunto Y de X, se define la *topología de subconjuntos de* Y por

$$T_Y = \{A \subset X \ / \ A \subset Y\} \cup \{X\}$$

Obsérvese que si $Y = X$ entonces $T^Y = T_I$ y $T_Y = T_D$, y si $Y = \emptyset$ entonces $T^Y = T_D$ y $T_Y = T_I$. En consecuencia, cuando hablemos en adelante de estas topologías supondremos que $\emptyset \neq Y \neq X$.

Ejemplo 1.1.5 La *topología cofinita* sobre un conjunto X se define por

$$T_{cof} = \{A \subset X \ / \ X - A \ es \ finito\} \cup \{\emptyset\}$$

Es fácil comprobar que $T_{cof} = \{X - B \ / \ B \subset X \ y \ B \ es \ finito\} \cup \{\emptyset\}$.

Si X es un conjunto finito, entonces la topología cofinita sobre X coincide con la discreta, con lo cual pierde todo su interés.

Ejemplo 1.1.6 Veamos por último cómo asociar una topología a un espacio métrico (ver Apéndice B), para lo cual tendrán un papel más protagonista las bolas abiertas que las cerradas.

Dado un espacio métrico (X, d), la *topología asociada a la métrica* d se define como el siguiente subconjunto de las partes de X:

$$T_d = \{A \subset X \ / \ para \ todo \ x \in A \ existe \ \varepsilon_x \in \mathbb{R}^+ \ con \ B(x, \varepsilon_x) \subset A\}$$

donde $\mathbb{R}^+$ denota el conjunto de los números reales positivos.

Efectivamente (X, T_d) es un espacio topológico. El vacío y el total son claramente abiertos. Además, si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos entonces todo punto x de $\bigcup_{i \in I} A_i$ pertenece a algún A_{i_0}, con $i_0 \in I$. Por definición de T_d, existe $\varepsilon_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, \varepsilon_x) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, y por tanto $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto. Por último, si $A_1, A_2 \in T_d$ entonces para todo $x \in A_1 \cap A_2$ se tiene que $x \in A_1$ y $x \in A_2$, luego existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $B(x, \varepsilon_1) \subset A_1$ y $B(x, \varepsilon_2) \subset A_2$. Tomando $\varepsilon_x = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ se tiene que $B(x, \varepsilon_x) \subset A_1 \cap A_2$, y por tanto $A_1 \cap A_2$ es abierto.

En particular, la topología asociada a la distancia usual de $\mathbb{R}^n$ se denomina *topología usual*.

Como cabía esperar, las bolas abiertas son abiertos de la topología asociada a una métrica. Para probarlo, dado $y \in B(x, \varepsilon)$ basta tomar $\varepsilon_y = \varepsilon - d(x, y)$ y $B(y, \varepsilon_y) \subset B(x, \varepsilon)$, pues si $z \in B(y, \varepsilon_y)$ entonces $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon_y = d(x, y) + (\varepsilon - d(x, y)) = \varepsilon$.

Obsérvese que no todas las topologías están asociadas a alguna métrica. Es decir, dado un espacio topológico (X, T) no siempre existe una métrica sobre X de forma que $T_d = T$. Cuando sí se cumpla esta propiedad diremos que (X, T) es un *espacio topológico metrizable*, o simplemente que T es una *topología métrica*.

Ejemplo 1.1.7 Todo espacio discreto (X, T_D) es metrizable. Basta considerar la métrica trivial d_t sobre X, que asigna distancia 1 a cualquier pareja de puntos distintos, para que $T_{d_t} = T_D$.

Ejemplo 1.1.8 Si X es un conjunto no vacío ni unitario, el espacio indiscreto (X, T_I) no es metrizable. Si existiese una métrica d tal que $T_d = T_I$, como las bolas abiertas son abiertos no vacíos y el único abierto no vacío en T_I es el total, ocurriría que $B(x, \varepsilon) = X$ para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$. Pero entonces, dado un punto y de X distinto de x, ocurriría que $y \notin B(x, \frac{d(x,y)}{2}) = X$, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, es posible que dos métricas generen la misma topología. En este caso se dirá que ambas métricas son *equivalentes*. Una muestra de esta situación se verá más adelante (Ejemplo 1.4.14).

En ocasiones puede ocurrir que, dadas dos topologías sobre un mismo conjunto, todos los abiertos de una topología lo sean también de la otra. En este caso, la topología con más abiertos distinguirá mejor los puntos del espacio. Esto se puede observar intuitivamente en el ejemplo extremo de la topología indiscreta, para la cual todos los puntos del espacio “se comportan igual”. La formalización de esta intuición es la siguiente:

Definición 1.1.2 Dadas dos topologías T y T' sobre un conjunto X, se dirá que T es *menos fina que T'* (o *T' más fina que* T) cuando $T \subset T'$.

Así, dado un conjunto X, la topología discreta será siempre la más fina de todas las topologías posibles sobre X, y la indiscreta la menos fina. El Ejemplo 1.4.13 que veremos más adelante también ilustra esta situación.

1.2. Bases de abiertos

A la hora de trabajar en un espacio topológico con la idea de proximidad, parece lógico que uno pueda reconocer los abiertos más “pequeños”que contienen a un punto. Para ello es fundamental el concepto que se introduce a continuación.

Definición 1.2.1 Dado un espacio topológico (X, T), se dice que un subconjunto $\mathcal{B}$ de T es *base de abiertos* cuando todo elemento de T se puede poner como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ es una base de abiertos en un espacio topológico (X, T), también se dirá que $\mathcal{B}$ es una *base de la topología T*.

Como cualquier abierto se puede expresar como unión de abiertos básicos, va a ser posible en muchas ocasiones trabajar únicamemte con estos últimos, lo cual simplificará los cálculos.

Por otro lado, observando la anterior definición, nos damos cuenta de que en cualquier espacio topológico la propia topología constituye una base. Sin embargo esto no aporta gran cosa, pues lo interesante es obtener siempre que sea posible una base minimal, es decir, contenida en cualquier otra base.

Nota 1.2.1 *Antes de entrar en ejemplos particulares que nos ayuden a comprender la anterior definición, hagamos alguna consideración general. Como todo abierto debe ponerse como unión de abiertos básicos, si pretendemos que un subconjunto $\mathcal{B}$ de una topología T sea base de abiertos, es claro que todos los subconjuntos unitarios que sean abiertos deben pertenecer a $\mathcal{B}$. Además, si algún punto pertenece únicamente al abierto X entonces el conjunto total debe ser un elemento de $\mathcal{B}$. Por último, hacemos notar que el conjunto vacío siempre puede expresarse coma unión vacía de elementos de $\mathcal{B}$ y por tanto no tiene por qué pertenecer a ninguna base* ($\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i$).

Ejemplo 1.2.1 Como todos los conjuntos unitarios que sean abiertos deben estar en cualquier base, se tiene que $\mathcal{B} = \{\{x\} \ / x \in X\}$ es una base minimal de la topología discreta sobre un conjunto X.

Ejemplo 1.2.2 Es evidente que $\mathcal{B} = \{X\}$ es la única base de la topología indiscreta distinta de la propia topología.

Ejemplo 1.2.3 Fijado un subconjunto Y de un conjunto no vacío ni unitario X, una base minimal de la topología de superconjuntos de Y es

$$\mathcal{B} = \{Y\} \cup \{Y \cup \{x\} \ / \ x \in X - Y\}$$

Vamos a comprobarlo en este ejemplo, aunque en los posteriores se dejará como ejercicio para el lector.

- Claramente $\mathcal{B} \subset T$.
- Si A es abierto no vacío entonces $Y \subset A$, y $A = Y \cup \bigcup_{x \in A-Y} Y \cup \{x\}$ es unión de abiertos básicos.
- Si $\mathcal{B}'$ es otra base de T^Y entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, pues ningún elemento $B \in \mathcal{B}$ puede ponerse como unión de abiertos estrictamente contenidos en B.

Ejemplo 1.2.4 Si sobre X consideremos ahora la topología de subconjuntos de Y, entonces $\mathcal{B} = \{X\} \cup \{\{y\} \ / \ y \in Y\}$ es una base minimal.

Ejemplo 1.2.5 Cuando en un conjunto infinito X consideramos la topología cofinita es imposible hallar una base minimal. Dado un abierto $B = X - \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de una base cualquiera $\mathcal{B}$ de T_{cof}, entonces tomando dos puntos distintos $x_{n+1}, x_{n+2} \notin \{x_1, ..., x_n\}$ podemos considerar dos nuevos abiertos $B_1 = X - \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$ y $B_2 = X - \{x_1, ..., x_n, x_{n+2}\}$ de forma que $B = B_1 \cup B_2$. Se obtiene así una base $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} - \{B\}) \cup \{B_1, B_2\}$ que no contiene a $\mathcal{B}$.

Usando esta idea y un proceso inductivo, tenemos la siguiente colección de bases no triviales de la topología cofinita:

$\mathcal{B}_0 = T_{cof} - \{X, \emptyset\}$, pues $X = (X - \{x_1\}) \cup (X - \{x_2\})$ si $x_1 \neq x_2$.

$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 - \{X - \{x\} \ / \ x \in X\}$, pues $X - \{x\} = (X - \{x, x_1\}) \cup (X - \{x, x_2\})$ si $x_1 \neq x_2$ y $x_1 \neq x \neq x_2$.

$\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 - \{X - \{x_1, x_2\} \ / \ x_1, x_2 \in X\}$, pues $X - \{x_1, x_2\} = (X - \{x_1, x_2, x_3\}) \cup (X - \{x_1, x_2, x_4\})$ si $x_3 \neq x_4$ y $x_3, x_4 \notin \{x_1, x_2\}$.

.

.

$\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{n-1} - \{X - \{x_1, x_2, ..., x_n\} \ / \ x_i \in X\}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Sin embargo no está claro cuándo detener este proceso, y por otro lado ninguna base mejora sustancialmente la anterior. En consecuencia, en la topología cofinita se suele considerar como base $\mathcal{B} = T_{cof} - \{\emptyset\}$.

Ejemplo 1.2.6 La definición de topología métrica garantiza que para todo subconjunto abierto A de un espacio métrico y todo punto x de A existe una bola abierta $B(x, \varepsilon_x)$ contenida en A. Entonces $A = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon_x)$, y como esto se ha hecho para un abierto arbitrario y además las bolas abiertas son abiertos, se concluye que el conjunto de las bolas abiertas es una base. Aunque esta base tampoco tiene por qué ser minimal (por ejemplo, en $(\mathbb{R}, T_u)$ es posible poner cualquier intervalo abierto como unión de otros distintos de él) es fácilmente manejable, y por ello se suele usar.

Observando el Ejemplo 1.2.6 anterior, vemos que en espacios métricos es posible pensar en las bolas, en cierto modo, como elementos de bases. Usando esta idea, y traduciendo la definición de topología métrica a un espacio topológico cualquiera, se obtiene la siguiente caracterización.

Proposición 1.2.1 *Sea $\mathcal{B}$ una familia de abiertos de un espacio topológico (X,T). Entonces, $\mathcal{B}$ es base de T si y sólo si para todo $A \in T$ y todo $x \in A$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Sean $A \in T$ y $x \in A$. Por la definición de base, existe $\{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$. Así, existe $i_0 \in I$ tal que $x \in B_{i_0} \subset A$.

($\Leftarrow$) Sea $A \in T$. Por hipótesis, para todo $x \in A$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ verificando que $x \in B_x \subset A$. Evidentemente $A = \bigcup\limits_{x\in A} B_x$.

$\blacksquare$

Hasta ahora en este párrafo hemos partido de un espacio topológico y extraído una familia de abiertos que genera, mediante uniones, a toda la topología. Sin embargo, es también posible hacer un proceso inverso. Para un conjunto X fijado, ciertos subconjuntos de partes de X generan, mediante uniones, una topología sobre X. Pero ojo, no todos los subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ tienen esta propiedad.

Proposición 1.2.2 *Sea X un conjunto. Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ verificando las siguientes propiedades:*

(B1) *Para todo $x \in X$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x$.*

(B2) *Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, para todo $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_{1,2}^x \in \mathcal{B}$ verificando que $x \in B_{1,2}^x \subset B_1 \cap B_2$.*

entonces los subconjuntos de X que pueden ponerse como uniones de elementos de $\mathcal{B}$ forman una topología sobre X con base $\mathcal{B}$, que será denominada topología generada por $\mathcal{B}$.

Demostración:

T1. $X = \bigcup_{x\in X} B_x$ y $\emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} B_i$ son abiertos.

T2. Si $\{A_i\}_{i\in I} \subset T$, entonces para todo $i \in I$ ocurre que $A_i = \bigcup_{j\in J_i} B_j$, donde todos los B_j son elementos de $\mathcal{B}$. Por tanto $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in K} B_k$ donde $K = \bigcup_{i\in I} J_i$, y es por tanto unión de elementos de $\mathcal{B}$.

T3. Si $A_1, A_2 \in T$ entonces $A_1 = \bigcup_{i\in I} B_i$ y $A_2 = \bigcup_{j\in J} B_j$, donde todos los B_i y B_j son elementos de $\mathcal{B}$. En consecuencia $A_1 \cap A_2 = (\bigcup_{i\in I} B_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{i\in I,\, j\in J} (B_i \cap B_j) = \bigcup_{i\in I,\, j\in J,\, x\in B_i\cap B_j} B^x_{i,j} \in T$, donde $B^x_{i,j}$ es el elemento de $\mathcal{B}$ existente por $(B2)$.

El hecho de que $\mathcal{B}$ es base de T se deduce de la propia definición de la topología. ■

Ahora podemos considerar un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$, y si verifica las propiedades adecuadas será base de una topología en X.

Ejemplo 1.2.7 En $\mathbb{R}$, es fácil comprobar que $\mathcal{B} = \{[a, b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$ verifica las propiedades exigidas en la Proposición 1.2.2. Por tanto genera una topología, que es denominada *topología de Sorgenfrey* o *topología del límite inferior*. Es fácil comprobar que la topología de Sorgenfrey es la siguiente:

$$T_{\mathcal{S}} = \{A \subset \mathbb{R} \ / \ para\ todo\ x \in A\ existe\ \varepsilon_x > 0\ tal\ que\ [x, x + \varepsilon_x) \subset A\}$$

1.3. Cerrados

Hay algunas definiciones de espacio topológico que no toman como conjuntos fundamentales los abiertos, sino sus complementarios.

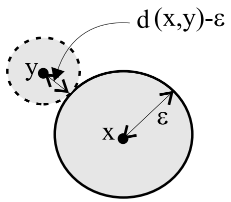
Definición 1.3.1 Dado un espacio topológico (X,T), un subconjunto F de X se dirá *cerrado* cuando su complementario sea un abierto.

La familia de todos los cerrados se denotará por $\mathcal{C}$.

Se deja como ejercicio hallar los cerrados en los espacios topológicos que se han presentado hasta ahora como ejemplos. Para hacerlo basta tener en cuenta que, dado un espacio topológico (X,T), la familia de cerrados es $\mathcal{C} = \{F \subset X \ / \ X - F \in T\}$.

Sólo resaltar que en las topologías métricas, por la definición de abierto, un subconjunto F es cerrado si y sólo si para todo $x \in X - F$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_x) \subset X - F$. Usando esto se puede probar que las bolas cerradas son cerrados:

Si $y \notin \overline{B}(x,\varepsilon)$ entonces $d(x,y) > \varepsilon$, y tomando $\varepsilon_y = d(x,y) - \varepsilon$ se verifica que $B(y,\varepsilon_y) \subset X - \overline{B}(x,\varepsilon)$. Efectivamente, para todo $z \in B(y,\varepsilon_y)$ se tiene que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, de donde $d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z) > d(x,y) - \varepsilon_y = d(x,y) - (d(x,y) - \varepsilon) = \varepsilon$, y por tanto $z \notin \overline{B}(x,\varepsilon)$.



Existe una correspondencia biunívoca entre los subconjuntos de un conjunto dado y sus complementarios, que aplicada a los espacios topológicos tiene la siguiente consecuencia.

Proposición 1.3.1 *Un subconjunto de un espacio topológico es abierto si y sólo si su complementario es un cerrado.*

Demostración:

Basta aplicar que $X - (X - A) = A$. ■

Teniendo en cuenta que el complementario del vacío es el total y viceversa, el complementario de una unión es la intersección de los complementarios y el complementario de una intersección es la unión de los complementarios, es claro que el conjunto de cerrados $\mathcal{C}$ de un espacio topológico (X, T) verifica las siguientes propiedades:

1. El vacío y el total son cerrados.

2. La intersección arbitraria de cerrados es un cerrado.

3. La unión finita de cerrados es un cerrado.

Toda topología está íntimamente relacionada con su familia de cerrados.

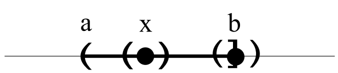
Proposición 1.3.2 *Si $\mathcal{C}$ es un subconjunto de las partes de X verificando* 1, 2 *y* 3*, entonces $T = \{A \subset X \ / \ X - A \in \mathcal{C}\}$ es una topología en X cuya familia de cerrados es $\mathcal{C}$.*

Como ejercicio, uno puede plantearse qué condiciones (del tipo de las de la Proposición 1.2.2) debe verificar un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$, para generar mediante intersecciones la familia de cerrados de un espacio topológico.

1.4. Entornos. Bases de entornos

Intuitivamente, se puede pensar en los abiertos de un espacio topológico como en conjuntos que *rodean* a todos sus puntos. Sin embargo, hay subconjuntos de un espacio topológico que rodean a algunos de sus puntos, pero no a otros.

Por ejemplo, un intervalo semiabierto $(a, b]$ en $\mathbb{R}$ rodea intuitivamente a todos los puntos $x \in (a, b)$, pero sin embargo no rodea a b, pues los puntos "cercanos" a b por la derecha no pertenecen a $(a, b]$:



Estas consideraciones dan pie a la siguiente definición:

Definición 1.4.1 Se dirá que un subconjunto U de un espacio topológico (X, T) es *entorno del punto* $x \in X$ si existe un abierto A verificando que $x \in A \subset U$.

El conjunto de entornos de un punto $x \in X$ se denotará por $Ent(x)$.

Cabe destacar las siguientes propiedades de los entornos de un punto, que aunque fáciles de probar (se deja como ejercicio) deben ser tenidas muy en cuenta.

Proposición 1.4.1 *Dado un espacio topológico* (X, T)*:*

a) *Un subconjunto de* X *es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos.*

b) *Todo punto de* X *tiene al menos un entorno.*

c) *Si* U *es entorno del punto* x*, entonces* x *pertenece a* U*.*

d) *Si* U *es entorno del punto* x *y* $U \subset V \subset X$ *entonces* V *es un entorno de* x*.*

e) *La intersección de dos entornos de un punto* x *es también un entorno de* x*.*

Ejemplo 1.4.1 En un espacio topológico indiscreto el conjunto total es el único entorno de cualquier punto.

Ejemplo 1.4.2 En un espacio topológico discreto cualquier subconjunto es entorno de todos sus puntos, al ser un abierto.

Ejemplo 1.4.3 Si en un conjunto X se considera la topología de superconjuntos de $Y \subset X$, dado $x \in X$ se tiene que $Ent(x) = \{U \subset X \ / \ Y \cup \{x\} \subset U\}$.

Ejemplo 1.4.4 Si en X se define la topología de subconjuntos de $Y \subset X$ entonces $Ent(x) = \{U \subset X \ / \ x \in U\}$ si $x \in Y$, o bien $Ent(x) = \{X\}$ si $x \notin Y$.

Ejemplo 1.4.5 En la topología cofinita el conjunto de entornos de un punto está formado exactamente por todos los abiertos que contienen a ese punto. Por el apartado (a) de la Proposición 1.4.1, todo abierto que contiene a un punto es un entorno de dicho punto. Recíprocamente, si U es un entorno de x existirá un abierto A con $x \in A \subset U$. Pero entonces $X - U \subset X - A$ es un conjunto finito, y en consecuencia U es un abierto.

Sobre los entornos en las topologías métricas o en la de Sorgenfrey no se puede añadir mucho más que lo que se deduce de la definición.

Hay un subconjunto de los entornos de un punto que suele ser útil. Es el conjunto de los *entornos abiertos*:

$$Ent_T(x) = \{A \in Ent(x) \ / \ A \in T\} = \{A \in T \ / \ x \in A\}$$

Pero aún es posible afinar más. De forma análoga a lo que ocurría con las bases de abiertos, es posible obtener una familia de entornos de todo punto, que serán también llamados básicos, cuya principal característica es que se aproximan al punto en todo lo posible.

Definición 1.4.2 Sea (X, T) un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que $\beta(x) \subset Ent(x)$ es una *base de entornos de* x cuando para todo entorno U de x existe $V \in \beta(x)$ tal que $V \subset U$.

Como ocurría con las bases de abiertos, aunque el conjunto de todos los entornos de un punto es una base de entornos trivial, hay poderosas razones de economía que aconsejan construir bases de entornos minimales, siempre que sea posible.

Nota 1.4.1 *Como consideraciones generales, podemos señalar aquí que si existe un entorno que es el menor que contiene a un punto (es decir, existe $U \in Ent(x)$ tal que todo $U' \in Ent(x)$ verifica $U \subset U'$) entonces $\beta(x) = \{U\}$ es una base de entornos minimal de x. Además, si hay algún punto que pertenece únicamente al abierto X, la única base de entornos de x es $\beta(x) = \{X\}$.*

Ejemplo 1.4.6 En la topología indiscreta el único entorno es el conjunto total, y por tanto está claro que $\beta(x) = Ent(x) = \{X\}$ es la única base de entornos de cualquier punto x.

Ejemplo 1.4.7 Como en la topología discreta todos los conjuntos unitarios son abiertos, se tiene que $\beta(x) = \{\{x\}\}$ es una base de entornos minimal del punto x.

Ejemplo 1.4.8 Si en un conjunto X no vacío ni unitario consideramos la topología de superconjuntos de $Y \subset X$, entonces $\beta(x) = \{Y \cup \{x\}\}$ es una base de entornos minimal de $x \in X$.

Ejemplo 1.4.9 Si en X consideremos la topología de subconjuntos de $Y \subset X$, la base de entornos minimal de un punto x es $\beta(x) = \{\{x\}\}$ si $x \in Y$, o bien $\beta(x) = \{X\}$ si $x \notin Y$.

Ejemplo 1.4.10 En un conjunto infinito X con la topología cofinita, es imposible hallar una base de entornos minimal para ningún punto (se deja como ejercicio comprobarlo, tomando como referencia lo que ocurre con las bases de abiertos en esta topología). Podemos obtener una colección infinita de bases de entornos no triviales para un punto:

$$\beta_0(x_0) = \{A \in T_{cof} \ / \ x_0 \in A\} - \{X\}.$$

$$\beta_1(x_0) = \beta_0(x_0) - \{X - \{x\} \ / \ x \in X, \ x \neq x_0\}.$$

$$\beta_2(x_0) = \beta_1(x_0) - \{X - \{x_1, x_2\} \ / \ x_1, x_2 \in X, \ x_1 \neq x \neq x_2\}.$$

.

.

pero tampoco aquí sabemos cuándo parar, ni hay gran mejora en las bases sucesivas. Por ello, en la topología cofinita se suele considerar como base de entornos de un punto la formada por todos los abiertos que lo tienen como elemento.

Ejemplo 1.4.11 En espacios métricos, una base de entornos que facilita el trabajo, y que por tanto es la más usada, es la formada por todas las bolas abiertas centradas en un punto.

$$\beta(x) = \{B(x, \varepsilon) \ / \ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

Aunque no es la única, también se pueden considerar como bases de entornos de x la formada por todas las bolas cerradas centradas en x, la formada por las bolas abiertas (o cerradas) centradas en x y con radio racional, o la formada por las bolas abiertas (o cerradas) centradas en x y con radio $\frac{1}{n}$, con n un número natural, entre otras.

Ejemplo 1.4.12 Por último, dejamos como ejercicio comprobar que una base de entornos de un punto $x \in \mathbb{R}$ en la topología de Sorgenfrey es $\beta(x) = \{[x, x+\varepsilon) \ / \ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$.

También en este caso se obtienen bases de entornos de x tomando intervalos cerrados, valores únicamente racionales para ε, o incluso valores del tipo $\frac{1}{n}$.

La íntima relación que se intuye entre las bases de abiertos y las bases de entornos aparece explícitamente en el siguiente resultado, donde a partir de una base de la topología se obtiene una base de entornos abiertos para cada punto y viceversa.

Proposición 1.4.2 *Dado un espacio topológico (X, T),*

a) Si $\mathcal{B}$ es base de T y $x \in X$, entonces $\beta(x) = \{B \in \mathcal{B} \ / \ x \in B\}$ es una base de entornos abiertos de x.

b) Si para cada punto $x \in X$ se tiene una base de entornos abiertos $\beta(x)$, entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \beta(x)$ es una base de T.

Demostración:

(a) Como todo abierto que tiene como elemento a x es un entorno abierto de x, se tiene que $\beta(x) \subset Ent_T(x)$. Además, si $U \in Ent(x)$

entonces, por definición de entorno, existe $A \in T$ tal que $x \in A \subset U$. Como $\mathcal{B}$ es base de la topología, por la Proposición 1.2.1 existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A \subset U$, y como $B_x \in \beta(x)$ queda probado que $\beta(x)$ es base de entornos de x.

(b) Sea $A \in T$. Si $x \in A$, por el apartado (a) de la Proposición 1.4.1 se verifica que $A \in Ent(x)$. Por la definición de base de entornos, existe $U_x \in \beta(x)$ con $U_x \subset A$, de donde $A = \bigcup_{x \in A} U_x$.

■

Aunque el proceso anterior es general, no siempre aplicándolo se obtienen bases de abiertos o de entornos óptimas. Por ejemplo, si se considera en $(\mathbb{R}, T_u)$ la base formada por las bolas abiertas, la base de entornos de un punto x que aparece está formada por todas las bolas abiertas que contienen a x, y es peor (en el sentido de que tiene más elementos) que la formada sólo por las bolas centradas en x.

El siguiente resultado prueba cómo relacionar topologías sobre un mismo conjunto si las bases de entornos en ambas topologías verifican ciertas condiciones.

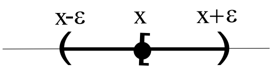
Proposición 1.4.3 *Sean T y T' dos topologías sobre un conjunto X, en las cuales se suponen fijadas bases de entornos $\beta(x)$ y $\beta'(x)$, respectivamente, para cada punto. Si para todo $x \in X$ y todo $U \in \beta(x)$ existe $U' \in \beta'(x)$ tal que $U' \subset U$, entonces T es menos fina que T'.*

Demostración:

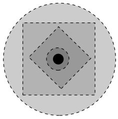
Si $A \in T$ entonces, como todo abierto es entorno de todos sus puntos, para todo $x \in A$ existe $U_x \in \beta(x)$ con $U_x \subset A$. Por hipótesis, existe $U'_x \in \beta'(x)$ tal que $U'_x \subset U_x \subset A$. Por ser entornos en T', para cada U'_x existe $A'_x \in T'$ con $x \in A'_x \subset U'_x$, y se tiene que $A = \bigcup_{x \in A} A'_x \in T'$.

■

Ejemplo 1.4.13 La topología de Sorgenfrey es más fina que la usual. Para probarlo basta considerar como bases de entornos de un punto x las ya conocidas $\beta(x) = \{[x, x+\varepsilon) \ / \ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ y $\beta'(x) = \{B(x, \varepsilon) \ / \ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ y aplicar la Proposición 1.4.3.



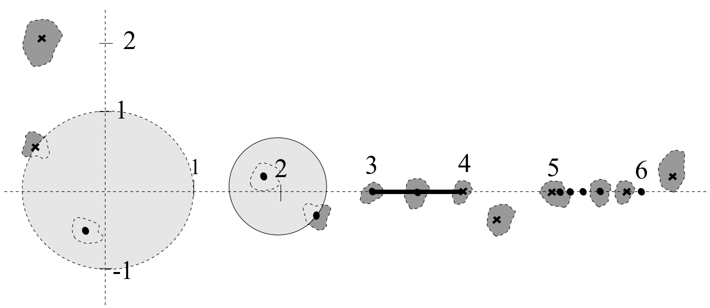
Ejemplo 1.4.14 Las topologías asociadas a las métricas euclídea, taxi y max en $\mathbb{R}^n$ coinciden (ver Ejemplos B.2 y 1.1.6). Esto se demuestra usando la Proposición 1.4.3 sin más que considerar como bases de entornos de un punto las formadas por las respectivas bolas centradas en el punto.



1.5. Conjuntos de puntos notables

Todo subconjunto Y de un espacio topológico tiene asociados de forma natural unos conjuntos que clasifican los puntos del espacio en función de su relación con Y.

Vamos a ilustrar las siguientes definiciones usando un subconjunto del plano usual.



$$Y_0 = B((0,0),1) \cup \bar{B}((2,0),\frac{1}{2}) \cup \{(x,0) \ / \ x \in [3,4) \cup \{5 + \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}\}$$

En el dibujo hemos representado algunos elementos de Y_0 por puntos, otros de su complementario por cruces, y los entornos como regiones abiertas del plano que contienen a los diferentes puntos, coloreando más oscuro las partes del entorno no contenidas en Y_0. Hemos elegido este ejemplo porque en los espacios euclídeos la intuición se corresponde con la realidad, y la nomenclatura asignada a los conjuntos de puntos notables representa adecuadamente cada situación. Pero ¡mucho cuidado! Al trabajar en espacios topológicos cualesquiera (incluso aunque sean espacios métricos) hay que razonar siguiendo las definiciones y paso a paso. El dejarse llevar por la intuición sin un razonamiento lógico puede conducir a errores muy graves.

En lo sucesivo en este párrafo supondremos fijado un subconjunto Y de un espacio topológico (X, T).

Definición 1.5.1 Un punto de Y se dirá *interior* de Y cuando tenga un entorno contenido en Y.

El conjunto de los puntos interiores de Y se denotará por $Int(Y)$ o también $\overset{o}{Y}$. En el ejemplo que hemos planteado $Int(Y_0) = B((0,0),1) \cup B((2,0), \frac{1}{2})$.

Definición 1.5.2 Un punto de $X - Y$ se dirá *exterior* de Y cuando sea un punto interior de $X - Y$.

El conjunto de puntos exteriores de Y se denotará $Ext(Y)$. En nuestro ejemplo $Ext(Y_0) = \mathbb{R}^2 - (\bar{B}((0,0),1) \cup \bar{B}((2,0), \frac{1}{2}) \cup \{(x,0) \ / \ x \in [3,4] \cup \{5\} \cup \{5 + \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}\})$.

Definición 1.5.3 Un punto de X se dirá *frontera* de Y cuando todos sus entornos tengan intersección no vacía con Y y con $X - Y$.

El conjunto de los puntos frontera de Y se denotará por $Fr(Y)$ o también $\delta(Y)$. En el ejemplo, $Fr(Y_0) = S_0^1 \cup S_1^1 \cup \{(x,0) \ / \ x \in [3,4] \cup \{5\} \cup \{5 + \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}\}$, donde S_i^1 representa la circunferencia centrada en $(2i, 0)$ con radio $\frac{1}{i+1}$, para $i \in \{0, 1\}$.

Definición 1.5.4 Un punto de X se dirá *clausura* (o *adherente*) de Y cuando todos sus entornos tengan intersección no vacía con Y.

El conjunto de puntos clausura de Y se denotará por $Cl(Y)$ o también $\overline{Y}$. En nuestro ejemplo $Cl(Y_0) = \bar{B}((0,0),1) \cup \bar{B}((2,0),\frac{1}{2}) \cup \{(x,0) \ / \ x \in [3,4] \cup \{5\} \cup \{5 + \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}\}$.

Definición 1.5.5 Un punto de Y se dirá *aislado* de Y si tiene algún entorno cuya intersección con Y sea únicamente ese punto.

El conjunto de puntos aislados de Y se denotará por $Ais(Y)$. En el ejemplo planteado $Ais(Y_0) = \{(5 + \frac{1}{n}, 0) \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

Definición 1.5.6 Un punto de X se dirá *de acumulación* (o *derivado*) de Y si todos sus entornos contienen algún punto de Y distinto de él mismo.

El conjunto de puntos de acumulación de Y se denotará por $Der(Y)$ o también Y'. En nuestro ejemplo $Der(Y_0) = \bar{B}((0,0),1) \cup \bar{B}((2,0),\frac{1}{2}) \cup \{(x,0) \ / \ x \in [3,4] \cup \{5\}\}$.

Es posible sustituir en las anteriores definiciones entornos por entornos básicos sin que varíen los conjuntos que se obtienen. Esto es muy interesante, pues simplifica los cálculos en la mayoría de los casos. Aún a riesgo de ser un poco pesados, vamos a enunciar explícitamente ese resultado, dejando la demostración como ejercicio.

Proposición 1.5.1 *Si en (X,T) hay fijada una base de entornos $\beta(x)$ para cada punto:*

$$Int(Y) = \{y \in Y \ / \ existe\ U \in \beta(y)\ con\ U \subset Y\}.$$

$$Ext(Y) = \{x \in X - Y \ / \ existe\ U \in \beta(x)\ con\ U \subset X - Y\}.$$

$$Fr(Y) = \{x \in X \ / \ U \cap Y \neq \emptyset \neq U \cap (X - Y)\ para\ todo\ U \in \beta(x)\}.$$

$$Cl(Y) = \{x \in X \ / \ todo\ U \in \beta(x)\ verifica\ U \cap Y \neq \emptyset\}.$$

$$Ais(Y) = \{y \in Y \ / \ existe\ U \in \beta(y)\ con\ U \cap Y = \{y\}\}.$$

$$Der(Y) = \{x \in X \ / \ todo\ U \in \beta(x)\ verifica\ (U - \{x\}) \cap Y \neq \emptyset\}.$$

Antes de estudiar algunos casos particulares que sirvan de ejemplo veremos algunas propiedades que, además de aclarar conceptos, pueden ser utilizadas para calcular conjuntos de puntos notables sin acudir a la definición.

Proposición 1.5.2

a) $Int(Y) = \bigcup_{A\in T,\, A\subset Y} A$.

b) $Int(Y)$ *es el mayor abierto contenido en* Y.

c) Y *es abierto si y sólo si* $Int(Y) = Y$.

d) $Ext(Y) = Int(X - Y)$.

e) $Fr(Y) = Fr(X - Y)$.

f) $Int(Y) \cup Ext(Y) \cup Fr(Y) = X$, *con* $Int(Y) \cap Ext(Y) = \emptyset$, $Int(Y) \cap Fr(Y) = \emptyset$ *y* $Ext(Y) \cap Fr(Y) = \emptyset$.

g) $Fr(Y) = \emptyset$ *si y sólo si* $Y \in T \cap \mathcal{C}$.

h) $Cl(Y) = Int(Y) \cup Fr(Y)$, *con* $Int(Y) \cap Fr(Y) = \emptyset$.

i) $Cl(Y) = Ais(Y) \cup Der(Y)$, *con* $Ais(Y) \cap Der(Y) = \emptyset$.

j) $Cl(Y) = \bigcap_{F\in\mathcal{C},\, Y\subset F} F$.

k) $Cl(Y)$ *es el menor cerrado que contiene a* Y.

l) Y *es cerrado si y sólo si* $Cl(Y) = Y$.

m) *En una topología métrica,* $x \in Cl(Y)$ *si y sólo si* $d(x, Y) = 0$.

n) *Si* Y *es un conjunto unitario entonces* $Ais(Y) = Y$.

Demostración:

(a) ($\subset$) Si $x \in Int(Y)$ existe $U \in Ent(x)$ tal que $U \subset Y$. Por definición de entorno, existe $A \in T$ tal que $x \in A \subset U \subset Y$, y por tanto $x \in \bigcup_{A\in T,\, A\subset Y} A$.

($\supset$) Si $x \in \bigcup_{A \in T,\, A \subset Y} A$, existe un abierto A_x tal que $x \in A_x \subset Y$. Así, $A_x \in Ent(x)$ y $A_x \subset Y$, de donde $x \in Int(Y)$.

(b) Consecuencia inmediata del apartado (a) anterior.

(c) Consecuencia inmediata del apartado (b) anterior.

(d) Consecuencia evidente de la definición de exterior.

(e) Consecuencia inmediata de la definición de frontera.

(f) Evidentemente $Int(Y) \cup Ext(Y) \cup Fr(Y) \subset X$. Para el otro contenido, sea $x \in X$. Si para todo $U \in Ent(x)$ se verifica que $U \cap Y \neq \emptyset$ y $U \cap (X - Y) \neq \emptyset$ entonces $x \in Fr(Y)$. En caso contrario, existirá un entorno de x que no interseque a Y, o bien existirá un entorno de x que no interseque a $X - Y$. Dicho en otras palabras, $x \in Ext(Y)$ ó $x \in Int(Y)$.

El hecho de que los tres conjuntos son disjuntos dos a dos se sigue evidentemente de su definición.

(g) ($\Rightarrow$) Si $Fr(Y) = \emptyset$ entonces, por el apartado (f) anterior, se tiene que X es la unión disjunta de $Int(Y)$ con $Ext(Y)$. Como $Int(Y) \subset Y$ y $Ext(Y) \subset X - Y$, se deduce que $Int(Y) = Y$ y $Ext(Y) = X - Y$, y por tanto Y es abierto y cerrado.

($\Leftarrow$) Si Y es abierto y cerrado entonces $Int(Y) = Y$ y $Ext(Y) = X - Y$. Aplicando de nuevo (f) se concluye que $Fr(Y) = X - (Int(Y) \cup Ext(Y)) = X - X = \emptyset$.

(h) ($\subset$) Si $x \in Cl(Y)$ entonces todo entorno de x tiene intersección no vacía con Y. Puede ocurrir que exista algún entorno de x contenido en Y, en cuyo caso $x \in Int(Y)$, o bien que todos los entornos de x intersequen tanto a Y como a $X - Y$, caso en el cual $x \in Fr(Y)$.

($\supset$) Basta observar que $Int(Y) \subset Cl(Y)$ y $Fr(Y) \subset Cl(Y)$, claramente por definición.

(i) ($\subset$) Si $x \in Cl(Y)$ entonces todo entorno de x tiene intersección no vacía con Y. Puede ocurrir que exista algún entorno de x cuya intersección con Y sea únicamente $\{x\}$, en cuyo caso $x \in Ais(Y)$, o bien que todos los entornos de x intersequen a Y en un conjunto que contenga estrictamente a $\{x\}$, caso en el cual $x \in Der(Y)$.

($\supset$) Basta observar que $Ais(Y) \subset Cl(Y)$ y $Der(Y) \subset Cl(Y)$, claramente por definición.

(j) $Cl(Y) = X - Ext(Y) = X - Int(X-Y) = X - (\bigcup_{A \in T,\ A \subset X-Y} A) = \bigcap_{A \in T,\ A \subset X-Y} (X - A) = \bigcap_{F \in \mathcal{C},\ F \supset Y} F.$

(k) Consecuencia inmediata del apartado (j) anterior.

(l) Consecuencia inmediata del apartado (k) anterior.

(m) Un punto x pertenece a $Cl(Y)$ si y sólo si toda bola abierta centrada en x tiene intersección con Y. Esto es equivalente a que para todo $\varepsilon > 0$ existe un punto $y \in Y$ cuya distancia a x sea menor que ε. Pero esto quiere decir exactamente que $d(x, Y) = 0$.

(n) Claramente, la intersección de cualquier entorno del único punto $y \in Y$ con Y es $\{y\}$.

■

Al definir los conjuntos de puntos notables ya hemos visto un ejemplo en el plano que ilustra su cálculo. Veamos ahora otros en distintos espacios topológicos.

Ejemplo 1.5.1 Consideramos un subconjunto Y de un espacio topológico discreto X. Sabemos que todo punto x tiene por base de entornos $\beta(x) = \{\{x\}\}$.

- Como Y es abierto, $Int(Y) = Y \equiv$ mayor abierto contenido en Y.
- $Ext(Y) = Int(X - Y) = X - Y$, pues $X - Y$ es también abierto.
- $Fr(Y) = X - (Y \cup (X - Y)) = \emptyset$, por el apartado (f) de la Proposición 1.5.2.

- $Cl(Y) = Y \cup \emptyset = Y$, por el apartado (h) de la Proposición 1.5.2.

- $Ais(Y) = Y$, pues para todo $y \in Y$ existe $U = \{y\} \in \beta(y)$ con $U \cap Y = \{y\}$.

- $Der(Y) = Y - Y = \emptyset$, por el apartado (i) de la Proposición 1.5.2.

Ejemplo 1.5.2 Sea ahora Y un subconjunto distinto del vacío y del total en un espacio topológíco indiscreto. Recordemos que $\beta(x) = Ent(x) = \{X\}$ es la única base de entornos de un punto x.

- $Int(Y) = \emptyset \equiv$ mayor abierto contenido en Y.

- Análogamente, $Ext(Y) = Int(X - Y) = \emptyset$.

- Como el único entorno de un punto es X, que interseca tanto a Y como a $X - Y$, se concluye que $Fr(Y) = X$. (También, usando el apartado (f) de la Proposición 1.5.2, se concluye que que $Fr(Y) = X - (\emptyset \cup \emptyset) = X$.

- $Cl(Y) = \emptyset \cup X = X$, por el apartado (h) de la Proposición 1.5.2.

- En el aislado hay que hacer una distinción. Si $Y = \{y\}$ es un conjunto unitario entonces $Ais(Y) = \{y\}$, por el apartado (n) de la Proposición 1.5.2. Sin embargo, si Y tiene dos o más elementos entonces $Ais(Y) = \emptyset$, pues la intersección de X (único entorno de cualquier punto de Y) con Y es $Y \neq \{y\}$.

- Usando el apartado (i) de la Proposición 1.5.2, $Der(Y) = X - Y$ si Y es un conjunto unitario, o bien $Der(Y) = X - \emptyset = X$ si Y no es unitario.

Ejemplo 1.5.3 Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología de superconjuntos de $[0, 1)$, e $Y = [0, \frac{1}{2}]$. Sabemos que $\beta(x) = \{[0, 1) \cup \{x\}\}$ es una base de entornos minimal para x.

- Como el único abierto contenido en $Y = [0, \frac{1}{2}]$ es $\emptyset$, por el apartado (b) de la Proposición 1.5.2 se tiene que $Int(Y) = \emptyset$.

- Análogamente, como $\mathbb{R} - Y = (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ tampoco contiene ningún abierto no vacío, sucede que $Ext(Y) = Int(\mathbb{R} - Y) = \emptyset$.

- Por el apartado (f) de la Proposición 1.5.2 se tiene que $Fr(Y) = X - (\emptyset \cup \emptyset) = X$.

- Todo entorno de cualquier punto contiene a $[0, 1)$, luego interseca a Y en infinitos puntos. Usando las definiciones $Cl(Y) = \mathbb{R}$, $Ais(Y) = \emptyset$ y $Der(Y) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.5.4 En $\mathbb{N}$ tomamos la topología de subconjuntos de $\{2, 4, 6\}$ y el subconjunto Y formado por los números pares. La base de entornos minimal de un punto x es $\beta(x) = \{\{x\}\}$ si $x \in \{2, 4, 6\}$, o bien $\beta(x) = \{\mathbb{N}\}$ si $x \notin \{2, 4, 6\}$.

- $Int(Y) = \{2, 4, 6\} \equiv$ mayor abierto contenido en Y.

- Como $\mathbb{N} - Y$ es el conjunto de los naturales impares, no hay ningún abierto no vacío contenido en $\mathbb{N} - Y$. Así, $Ext(Y) = Int(\mathbb{N} - Y) = \emptyset$.

- $Fr(Y) = \mathbb{N} - (\{2, 4, 6\} \cup \emptyset) = \mathbb{N} - \{2, 4, 6\}$, por el apartado (f) de la Proposición 1.5.2.

- $Cl(Y) = \{2, 4, 6\} \cup (\mathbb{N} - \{2, 4, 6\}) = \mathbb{N}$, por el apartado (h) de la Proposición 1.5.2.

- Si $y \in \{2, 4, 6\}$ entonces su único entorno básico es $U = \{y\}$, y como $U \cap Y = \{y\}$ se tiene que $y \in Ais(Y)$. En cambio, si $y \notin \{2, 4, 6\}$ su único entorno básico es $U = \mathbb{N}$, e $y \notin Ais(Y)$ (pues $U \cap Y = Y \neq \{y\}$). En consecuencia $Ais(Y) = \{2, 4, 6\}$.

- $Der(Y) = \mathbb{N} - \{2, 4, 6\}$, por el apartado (i) de la Proposición 1.5.2.

Ejemplo 1.5.5 Sea ahora la topología cofinita sobre un conjunto infinito X, e Y un subconjunto de X distinto del vacío y del total. Fijamos $\beta(x) = Ent(x) = Ent_T(x)$ como base de entornos de cada punto x.

Antes de comenzar, debemos hacer una consideración. En la topología cofinita un subconjunto distinto del vacío y del total puede ser abierto y no cerrado (si su complementario es finito), cerrado y no abierto (si es finito) o ni abierto ni cerrado (si ni él ni su complementario son finitos), pero no puede ser abierto y cerrado a la vez.

- Claramente, si Y es abierto entonces $Int(Y) = Y$. Sin embargo, si Y no es abierto entonces $X - Y$ no es finito e $Int(Y) = \emptyset$, pues si existiese un abierto no vacío $X - \{x_1, ..., x_n\} \subset Y$ entonces $X - (X - \{x_1, ..., x_n\}) = \{x_1, ..., x_n\} \supset X - Y$.

- Usando el razonamiento anterior, si Y cerrado entonces $Ext(Y) = Int(X - Y) = X - Y$, y si Y no es cerrado entonces $Ext(Y) = Int(X - Y) = \emptyset$.

- Por el apartado (f) de la Proposición 1.5.2

$$Fr(Y) = \begin{cases} X - (Y \cup \emptyset) = X - Y & , si\ Y \in T_{cof} \\ X - (\emptyset \cup \emptyset) = X & , si\ Y \notin T_{cof}\ e\ Y \notin \mathcal{C}_{cof} \\ X - (\emptyset \cup (X - Y)) = Y & , si\ Y \in \mathcal{C}_{cof} \end{cases}$$

- Si Y es finito los puntos de $X - Y$ no son adherentes, pues todo $x \in X - Y$ tiene por entorno a $U = X - Y$ que no toca a Y, luego $Cl(Y) = Y$. Sin embargo, si Y es infinito, entonces todo entorno $U = X - \{x_1, ..., x_n\}$ de cualquier punto tendrá intersección con Y, y $Cl(Y) = X$.

- Si Y es finito entonces para todo $y \in Y$ podemos considerar el entorno $U = (X - Y) \cup \{y\}$ verificando $U \cap Y = \{y\}$, y por tanto $Ais(Y) = Y$. Sin embargo, si Y no es finito entonces todo entorno $X - \{x_1, ..., x_n\}$ de un punto $y \in Y$ contiene infinitos puntos de Y, de donde $Ais(Y) = \emptyset$.

- Por el apartado (i) de la Proposición 1.5.2,

$$Der(Y) = \begin{cases} Y - Y = \emptyset & , si\ Y\ es\ finito \\ X - \emptyset = X & , si\ Y\ es\ infinito \end{cases}$$

Ejemplo 1.5.6 Consideremos en $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey el subconjunto $Y = [0, 1)$. Usaremos $\beta(x) = \{[x, x + \varepsilon) \ / \ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ como bases de entornos.

- $Int(Y) = Y$, al ser Y un abierto.

- $\mathbb{R} - Y = (-\infty, 0) \cup [0, \infty) = (\bigcup_{\varepsilon>0}[-\varepsilon, 0)) \cup (\bigcup_{\varepsilon>0}[0, \varepsilon))$ es también abierto, y por tanto $Ext(Y) = Int(\mathbb{R} - Y) = \mathbb{R} - Y$.

- Usando el apartado (f) de la Proposición 1.5.2 se tiene que

$$Fr(Y) = \mathbb{R} - (Y \cup (\mathbb{R} - Y)) = \mathbb{R} - \mathbb{R} = \emptyset$$

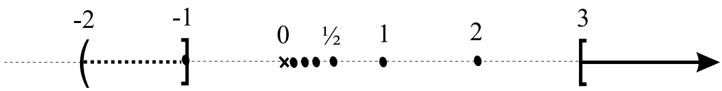
- $Cl(Y) = Y \cup \emptyset = Y$, por el apartado (h) de la Proposición 1.5.2.

- Para todo $x \in Y = [0, 1)$, cualquier entorno básico $[x, x + \varepsilon)$ interseca a Y en infinitos puntos. Luego $Ais(Y) = \emptyset$

- Por el apartado (i) de la Proposición 1.5.2, $Der(Y) = Y - \emptyset = Y$.

Ejemplo 1.5.7 Por último tomemos el siguiente subconjunto de la recta usual:

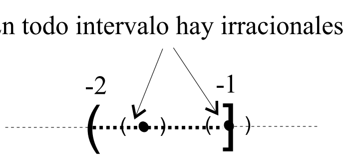
$$Y = ((-2, -1] \cap \mathbb{Q}) \cup \{\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}\} \cup \{2\} \cup [3, \infty)$$



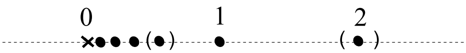
Consideraremos como base de entornos de cada punto la formada por las bolas abiertas centradas en ese punto.

- $Int(Y) = (3, \infty)$. Como $Int(Y) \subset Y$, estudiaremos sólo los puntos de Y:

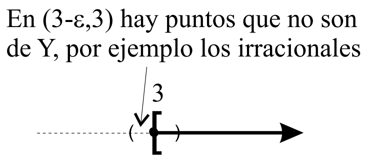
  Si $y \in (-2, -1] \cap \mathbb{Q}$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe algún irracional menor que 3 (y por tanto que no pertenece a Y) en $B(y, \varepsilon)$. Luego ninguna bola abierta centrada en y está contenida en Y.



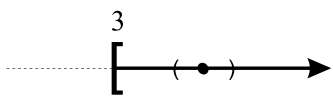
Ninguna bola centrada en $y = \frac{1}{n}$ está contenida en Y (como antes, existe algún irracional menor que 3 en $B(\frac{1}{n}, \varepsilon)$). Lo mismo ocurre con $y = 2$.



Toda bola centrada en $y = 3$ toca a $\mathbb{R} - Y$ por la izquierda.

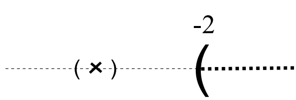


Si $y \in (3, \infty)$ basta tomar $\varepsilon \leq d(y, 3)$ para que $B(y, \varepsilon) \subset Y$.

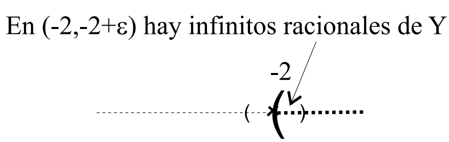


- $Ext(Y) = Int(\mathbb{R} - Y) = (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$. Estudiemos los puntos de $\mathbb{R} - Y$:

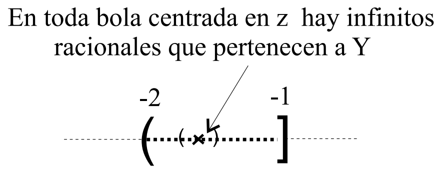
  Si $z \in (-\infty, -2)$ basta tomar $\varepsilon \leq d(z, -2)$ para que $B(z, \varepsilon) \subset \mathbb{R} - Y$.



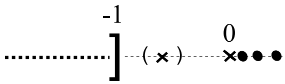
Toda bola centrada en $z = -2$ toca a Y por la derecha.



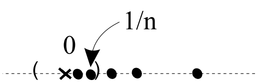
Si $z \in (-2, -1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, ninguna bola abierta centrada en z está contenida en $\mathbb{R} - Y$.



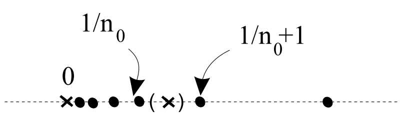
Si $z \in (-1,0)$ basta tomar $\varepsilon \leq min\{d(z,-1), d(z,0)\}$ para que $B(z,\varepsilon) \subset \mathbb{R} - Y$.



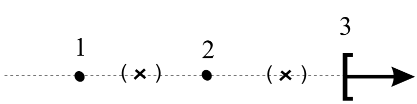
Si $z = 0$, como para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ entonces $\frac{1}{n} \in B(0,\varepsilon)$. Luego ninguna bola centrada en 0 está contenida en $\mathbb{R} - Y$.



Si $z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n})$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z \in (\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1})$. Basta tomar $\varepsilon \leq min\{d(z, \frac{1}{n_0}), d(z, \frac{1}{n_0+1})\}$ para que $B(z,\varepsilon) \subset \mathbb{R} - Y$.



Si $z \in (1,2)$ basta tomar $\varepsilon \leq min\{d(z,1), d(z,2)\}$ para que $B(z,\varepsilon) \subset \mathbb{R} - Y$. Análogamente para $z \in (2,3)$ con $\varepsilon \leq min\{d(z,2), d(z,3)\}$.

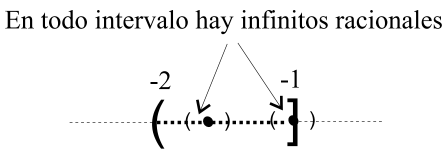


- $Fr(Y) = [-2,-1] \cup \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{2,3\}$, por el apartado (f) de la Proposición 1.5.2.

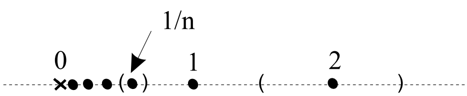
- $Cl(Y) = [-2,-1] \cup \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{2\} \cup [3,\infty)$, por el apartado (h) de la Proposición 1.5.2.

- $Ais(Y) = \{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{2\}$, pues:

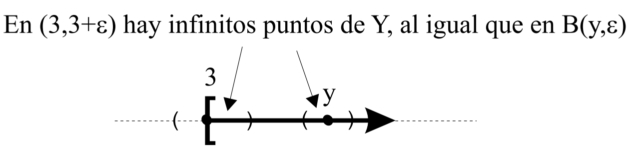
  Si $y \in (-2,-1] \cap \mathbb{Q}$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen infinitos puntos en $B(y,\varepsilon) \cap (-2,-1] \cap \mathbb{Q}$, luego ninguna bola abierta centrada en y interseca a Y en un único punto.



  Si $y = \frac{1}{n}$, tomando $\varepsilon \leq d(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$ está claro que $B(\frac{1}{n},\varepsilon) \cap Y = \frac{1}{n}$. Además, $B(2,\frac{1}{2}) \cap Y = \{2\}$.



  Toda bola centrada en $y = 3$ toca a Y por la derecha en infinitos puntos, luego ninguna bola abierta centrada en y interseca a Y en un único punto. Análogamente, si $y \in (3,\infty)$ toda bola centrada en y toca a Y en infinitos puntos tanto por la derecha como por la izquierda.



- $Der(Y) = [-2,-1] \cup \{0\} \cup [3,\infty)$, por el apartado (i) de la Proposición 1.5.2.

Cabe destacar que aunque en $(\mathbb{R}^n, T_u)$ se verifica que $Int(\overline{B}(x,\varepsilon)) = B(x,\varepsilon)$ y $Cl(B(x,\varepsilon)) = \overline{B}(x,\varepsilon)$, esto no puede ser generalizado a cualquier espacio métrico. En particular, tomando la métrica trivial sobre un conjunto no vacío ni unitario X y las bolas de radio 1, se obtiene un contraejemplo.

Otras propiedades de los conjuntos de puntos notables son las siguientes:

Proposición 1.5.3 *Dados dos subconjuntos Y, Z de un espacio topológico (X, T):*

a) $Int(Y) \cup Int(Z) \subset Int(Y \cup Z)$.

b) *Si* $Y \subset Z$ *entonces* $Int(Y) \subset Int(Z)$.

Demostración:

(a) Si $x \in Int(Y) \cup Int(Z)$ entonces existe $U \in Ent(x)$ tal que $U \subset Y$ ó existe $V \in Ent(x)$ tal que $V \subset Z$. Luego al menos uno de esos entornos de x está contenido en $Y \cup Z$, y por tanto $x \in Int(Y \cup Z)$.

(b) Si $x \in Int(Y)$ entonces existe $U \in Ent(x)$ tal que $U \subset Y$. Como $Y \subset Z$, entonces $U \subset Z$, y por tanto $x \in Int(Z)$.

■

Un contraejemplo que demuestra que en el apartado (a) de la Proposición 1.5.3 anterior la igualdad no siempre es cierta se obtiene considerando en el conjunto de los números naturales la topología de superconjuntos de $\{1,2\}$. Los subconjuntos $Y = \{1\}$ y $Z = \{2\}$ verifican que $Int(Y \cup Z) = \{1,2\}$ no está contenido en $Int(Y) \cup Int(Z) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

Usando la definición de interior, a partir de cualquier base de entornos se obtiene una base de entornos abiertos.

Proposición 1.5.4 *Dado un espacio topológico (X, T), si $\beta(x)$ es una base de entornos del punto $x \in X$ entonces $\beta'(x) = \{Int(U) \ / \ U \in \beta(x)\}$ es una base de entornos abiertos de x.*

Demostración:

Sea $Int(U) \in \beta'(x)$. Entonces $U \in \beta(x) \subset Ent(x)$, luego existe $A \in T$ con $x \in A \subset U$. Como $Int(U)$ es el mayor abierto contenido en U, se tiene que $x \in A \subset Int(U) \subset U$. Por tanto $\beta'(x) \subset Ent_T(x)$.

Por otro lado, si $U \in Ent(x)$ entonces existe $V \in \beta(x)$ tal que $V \subset U$. Como $V \in Ent(x)$, existe $A \in T$ tal que $x \in A \subset V$. Pero $Int(V)$ es el mayor abierto contenido en V, luego $x \in A \subset Int(V) \subset V \subset U$. Se concluye que $\beta'(x)$ es una base de entornos de x. ■

Es claro que, dado un espacio topológico (X, T), se verifica que $Cl(X) = X$. Pero no es difícil encontrar otros subconjuntos de espacios topológicos cuya clausura sea el conjunto total. Esto da pie a la siguiente definición.

Definición 1.5.7 Un subconjunto de un espacio topológico se dirá *denso* cuando su clausura coincida con el conjunto total.

Proposición 1.5.5 *Dado un subconjunto Y de un espacio topológico (X, T):*

a) Y es denso si y sólo si tiene intersección no vacía con todos los abiertos no vacíos.

b) Y es denso si y sólo si su exterior es el conjunto vacío.

c) Y es denso y cerrado si y sólo si $Y = X$.

Demostración:

(a) ($\Rightarrow$) Si $A \in T - \{\emptyset\}$ entonces existe $x \in A$, y por el apartado (a) de la Proposición 1.4.1 se tiene que $A \in Ent(x)$. Como $x \in Cl(Y) = X$, de la definición de clausura se deduce que que $A \cap Y \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Sea $x \in X$. Para todo $U \in Ent(x)$, existe $A \in T$ tal que $x \in A \subset U$. Por hipótesis $A \cap Y \neq \emptyset$, de donde $U \cap Y \neq \emptyset$. Luego todo punto de X pertenece a $Cl(Y)$, y por tanto Y es denso.

(b) Consecuencia directa de que $Cl(Y) \cup Ext(Y) = X$ y $Cl(Y) \cap Ext(Y) = \emptyset$.

(c) ($\Rightarrow$) Si Y es denso y cerrado entonces $Y = Cl(Y) = X$.

($\Leftarrow$) Si $Y = X$ entonces $Cl(Y) = Y = X$. Por tanto Y es cerrado y denso.

■

Vamos a dar a continuación una colección de ejemplos relacionados con la densidad. Se deja como ejercicio probar lo que se afirma, pues se dispone de herramientas más que suficientes para hacerlo.

Ejemplo 1.5.8 En un espacio indiscreto cualquier subconjunto no vacío es denso.

Ejemplo 1.5.9 En un espacio discreto el único subconjunto denso es el total.

Ejemplo 1.5.10 En la topología T_Y de subconjuntos de Y, un subconjunto es denso si y sólo si contiene a Y.

Ejemplo 1.5.11 En la topología T^Y de superconjuntos de Y, un subconjunto es denso si y sólo si tiene intersección no vacía con Y.

Ejemplo 1.5.12 En (X, T_{cof}), los subconjuntos densos son los infinitos.

Ejemplo 1.5.13 En $(\mathbb{R}, T_u)$ (y en general en espacios métricos) no se puede dar una caracterización de los conjuntos densos mejor que la ya conocida. Sin embargo, sí que es conveniente decir que los conjuntos densos "por excelencia"(pues dan la idea intuitiva de densidad en la recta real) son $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y todos sus superconjuntos.

Ejemplo 1.5.14 Por último, los subconjuntos densos de $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey coinciden con los de la topología usual.

Capítulo 2

Subespacios Topológicos

En este capítulo vamos a descubrir cómo definir una topología sobre cualquier subconjunto de un espacio topológico. Este proceso nos proporciona una gran cantidad de nuevos espacios cuyas construcciones (abiertos, cerrados, bases, bases de entornos,...) están relacionadas con las respectivas del espacio original.

2.1. Topología inducida

Comenzaremos viendo cómo toda topología sobre un conjunto X induce una topología en cada uno de sus subconjuntos.

Proposición 2.1.1 Si Y es un subconjunto de un espacio topológico (X, T) entonces la siguiente es una topología sobre Y:

$$T_Y = \{A \cap Y \ / \ A \in T\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

Demostración:

T1. $\emptyset = \emptyset \cap Y \in T_Y$ e $Y = X \cap Y \in T_Y$, pues $\emptyset, X \in T$.

T2. Si $\{A_i\}_{i \in I} \subset T$ entonces $\bigcup\limits_{i \in I}(A_i \cap Y) = (\bigcup\limits_{i \in I} A_i) \cap Y \in T_Y$, pues $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in T$ al ser T topología.

T3. Si $A_1, A_2 \in T$ entonces $(A_1 \cap Y) \cap (A_2 \cap Y) = (A_1 \cap A_2) \cap Y \in T_Y$, pues $A_1 \cap A_2 \in T$ al ser T topología.

■

T_Y se denominará *topología inducida* (o bien *topología relativa*). Se dirá que (Y, T_Y) es un *subespacio topológico* de (X, T), o simplemente que Y es un *subespacio topológico* de X si se sobrentienden las topologías asociadas.

Ejemplo 2.1.1 Es claro que la topología inducida en cualquier subconjunto de un espacio topológico indiscreto es de nuevo la indiscreta.

Ejemplo 2.1.2 También, la topología inducida en cualquier subconjunto de un espacio discreto es la discreta.

Ejemplo 2.1.3 Si sobre un conjunto X se tiene la topología T^Y de superconjuntos de Y (con $\emptyset \neq Y \neq X$) entonces dado $Z \subset X$ es fácil comprobar que $(T^Y)_Z = T^{Y \cap Z} \equiv$ topología de superconjuntos de $Y \cap Z$.
Por tanto, si $Y \cap Z = \emptyset$ entonces $(T^Y)_Z$ es la topología discreta, y cuando $Y \cap Z = Z$ sucede que $(T^Y)_Z$ es la topología indiscreta.

Ejemplo 2.1.4 Si lo que se tiene sobre X es la topología T_Y de subconjuntos de Y entonces la topología inducida en Z es $(T_Y)_Z = T_{Y \cap Z} \equiv$ topología de subconjuntos de $Y \cap Z$.
Si $Y \cap Z = \emptyset$ entonces $(T_Y)_Z$ es la topología indiscreta, y cuando $Z \subset Y$ sucede que $(T_Y)_Z$ es la topología discreta.

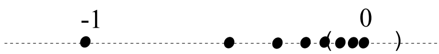
Ejemplo 2.1.5 Cuando se considera la topología cofinita sobre un conjunto X, la topología inducida sobre cualquier conjunto Y es de nuevo la cofinita, esto es,

$$(T_{cof})_Y = \{A \subset Y \;/\; Y - A \; es \; finito\} \cup \{\emptyset\}$$

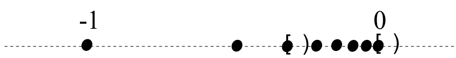
Por tanto, cuando Y es un conjunto finito se tiene que $(T_{cof})_Y$ es la topología discreta.

Ejemplo 2.1.6 Si en la recta real se considera el subconjunto $Y = \{-\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ entonces la topología inducida por la usual en Y es la discreta, puesto que todo subconjunto unitario $\{-\frac{1}{n}\}$ de Y se puede expresar como $B(-\frac{1}{n}, \varepsilon) \cap Y$, sin más que considerar $\varepsilon \leq d(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1})$.

Ejemplo 2.1.7 Sin embargo, la topología usual no induce en el subconjunto $Y = \{-\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ la topología discreta, puesto que $\{0\}$ no es abierto. Si $0 \in A \cap Y \in T_Y$, como $A \in T_u$ existe $\varepsilon > 0$ con $0 \in B(0, \varepsilon) \subset A$, y existe un natural n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Luego para todo $n \geq n_0$ se tiene que $-\frac{1}{n} \in B(x, \varepsilon) \subset A$, y todo abierto de la topología inducida que contenga a 0 contiene además a infinitos puntos de Y.



Ejemplo 2.1.8 Considerando el mismo subconjunto Y como subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey, sí que ocurre que la topología inducida es la discreta, como puede observarse en la siguiente figura.



Una propiedad se dirá *hereditaria* cuando, dado un espacio topológico verificando dicha propiedad, todos sus subespacios también la verifican. Si queremos ser más analíticos, podemos enunciar:

Definición 2.1.1 Una propiedad P se dirá *hereditaria* cuando

$$(X, T) \text{ verifica } P \Rightarrow \textit{para todo } Y \subset X : \ (Y, T_Y) \text{ verifica } P$$

Un ejercicio interesante es comprobar que "ser metrizable" es una propiedad hereditaria. Teniendo en cuenta que cualquier distancia d sobre un conjunto X induce en todo $Y \subset X$ una distancia d_Y definida por $d_Y(y, y') = d(y, y')$, con $B_Y(y, \varepsilon) = B(y, \varepsilon) \cap Y$, se puede probar que $(T_d)_Y = T_{d_Y}$.

Para que la definición de subespacio topológico sea coherente, toda topología de un conjunto X debe inducir una única topología sobre cada subconjunto. Esto viene garantizado por el siguiente resultado.

Proposición 2.1.2 Si (X, T) es un espacio topológico y $Z \subset Y \subset X$ entonces $(T_Y)_Z = T_Z$.

Demostración:

$B \in (T_Y)_Z$ si y sólo si existe $B' \in T_Y$ tal que $B = B' \cap Z$. Esto equivale a que exista $B'' \in T$ tal que $B = (A'' \cap Y) \cap Z = A'' \cap (Y \cap Z) = A'' \cap Z$, o lo que es lo mismo, a que $B \in T_Z$. ■

De lo hecho hasta ahora se desprende que no todo abierto en una topología inducida es abierto en la topología de partida.

Ejemplo 2.1.9 Considerando la topología cofinita sobre un conjunto infinito X y un subconjunto finito $Y \subset X$, es claro que $Y \in (T_{cof})_Y$ pero Y no es abierto en (X, T_{cof}).

Ejemplo 2.1.10 En la topología usual de la recta real se tiene que $[0,1] \in (T_u)_{[0,1]}$ pero $[0,1] \notin T_u$.

Sin embargo, cuando el subconjunto Y es abierto en la topología T de X, sí que ocurre que los abiertos de T_Y son exactamente los abiertos de T que están contenidos en Y.

Proposición 2.1.3 Sea Y un abierto de un espacio topológico (X, T) y $A \subset Y$. Entonces, $A \in T_Y$ si y sólo si $A \in T$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $A \in T_Y$ entonces $A = A' \cap Y$, con $A' \in T$. Como $Y \in T$ y la intersección de abiertos es abierto, se concluye que $A \in T$.

($\Leftarrow$) Si $A \in T$, como $A \subset Y$ se tiene que $A = A \cap Y \in T_Y$. ■

Nótese que en la demostración anterior, la implicación ($\Leftarrow$) es cierta siempre, aún cuando Y no sea abierto.

Ahora que sabemos cómo asociar una topología a cualquier subconjunto de un espacio topológico, parece lógico plantearnos si las estructuras de esta topología inducida (bases, cerrados, conjuntos de puntos notables...) se relacionan de alguna manera con las correspondientes de la topología original. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y en las próximas secciones nos dedicaremos a estudiar estas relaciones con detalle.

Sin embargo, no se debe olvidar que al inducir topología en un subconjunto de un espacio topológico se obtiene un nuevo espacio que una vez definido puede ser estudiado independientemente, sin recurrir en absoluto al espacio original.

2.2. Bases de abiertos

Toda base de un espacio topológico induce de forma natural una base en la topología inducida en cualquier subconjunto.

Proposición 2.2.1 *Si $\mathcal{B}$ es una base de abiertos de un espacio topológico (X,T) e $Y \subset X$ entonces $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \ / \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de abiertos en (Y,T_Y).*

Demostración:

Evidentemente $\mathcal{B}_Y \subset T_Y$ pues $\mathcal{B} \subset T$. Por otro lado, si $B \in T_Y$ entonces es de la forma $B = A \cap Y$, con $A \in T$. Ahora bien, por ser $\mathcal{B}$ base de abiertos en X, existe $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, luego

$$B = A \cap Y = (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap Y = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap Y).$$

■

Este proceso es muy útil para obtener bases en topologías inducidas, pero no garantiza que las bases obtenidas sean óptimas.

Ejemplo 2.2.1 Dado un conjunto infinito X con la topología cofinita y un subconjunto finito Y, si se considera como base $\mathcal{B} = T_{cof} - \{\emptyset\}$, que como se afirma en el Ejemplo 1.2.5 suele ser la más adecuada, por el proceso anterior se obtiene en $(T_{cof})_Y$ la base $\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y)$. Sin embargo sabemos que $(T_{cof})_Y$ es la topología discreta, y por tanto una base minimal sería la formada por todos los subconjuntos unitarios de Y.

2.3. Cerrados

Análogamente a lo que ocurre con los abiertos, los cerrados de un subespacio topológico son las intersecciones de los cerrados del espacio de partida con el subconjunto.

Proposición 2.3.1 *Si Y es un subconjunto de un espacio topológico (X,T) entonces F' es un cerrado en T_Y si y sólo si existe un cerrado F en T tal que $F' = F \cap Y$.*

Demostración:

F' es cerrado en T_Y si y sólo si $Y - F' \in T_Y$. Esto es equivalente a que exista $A \in T$ con $Y - F' = A \cap Y$. Pero esto ocurrirá si y sólo si $F' = (X - A) \cap Y$. La demostración de este último paso se deja como ejercicio. ■

Si Y es un subconjunto de un espacio (X,T), el conjunto de los cerrados en la topología inducida en Y se suele denotar por $\mathcal{C}_Y$.

Como también ocurría con los abiertos, no todos los cerrados de un subespacio topológico son cerrados en el espacio original. Esto será cierto cuando el subconjunto Y sea cerrado en la topología de partida.

Proposición 2.3.2 *Sea Y un cerrado de un espacio topológico (X,T) y $F \subset Y$. Entonces $F \in \mathcal{C}_Y$ si y sólo si $F \in \mathcal{C}$.*

Demostración:

Evidente teniendo en cuenta la Proposición 2.3.1 anterior y el hecho de que la intersección arbitraria de cerrados es cerrado. ■

Obsérvese que la implicación hacia la izquierda es cierta aún cuando Y no sea cerrado, es decir, si F es un cerrado en T contenido en Y entonces F es siempre un cerrado en T_Y.

2.4. Entornos. Bases de entornos

Es posible conocer los entornos de un punto en un subespacio topológico sin más que conocer los entornos de ese punto en el espacio de partida.

Dado un espacio topológico (X, T) y un subconjunto, Y de X denotaremos por $Ent_Y(y)$ al conjunto de los entornos de $y \in Y$ en la topología inducida. Así podemos enunciar:

Proposición 2.4.1 *$U \in Ent_Y(y)$ si y sólo si existe $V \in Ent(y)$ tal que $U = V \cap Y$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $U \in \mathrm{Ent}_Y(y)$ entonces existe $A' \in T_Y$ con $y \in A' \subset U$. Como $A' \in T_Y$ existirá $A \in T$ con $A' = A \cap Y$. Se considera $V = A \cup U \in Ent(y)$, pues $y \in A \subset V$, y verifica que $V \cap Y = (A \cup U) \cap Y = (A \cap Y) \cup (U \cap Y) = A' \cup U = U$.

($\Leftarrow$) Si $V \in \mathrm{Ent}(y)$ entonces existe $A \in T$ tal que $y \in A \subset V$. En consecuencia $y \in A \cap Y \subset V \cap Y$, y por tanto $U = V \cap Y \in Ent_Y(y)$.

■

Nótese que si $U \in Ent(x)$ y $U \subset Y$ entonces $U \in Ent_Y(x)$.

Como consecuencia de la Proposición 2.4.1 anterior, bases de entornos en un espacio topológico inducen, mediante intersecciones, bases de entornos en los subespacios.

Proposición 2.4.2 *Si Y es un subconjunto de un espacio topológico (X, T) y $\beta(y)$ es una base de entornos de $y \in Y$ en (X, T), entonces $\beta_Y(y) = \{V \cap Y \ / \ V \in \beta(y)\}$ es una base de entornos de y en (Y, T_Y).*

Demostración:

Evidentemente $\beta_Y(y) \subset Ent_Y(y)$ puesto que $\beta(y) \subset Ent(y)$. Por otro lado, si $U \in Ent_Y(y)$ entonces existe $V \in Ent(y)$ tal que $U =$

$V \cap Y$. Como $V \in Ent(y)$ existe $W \in \beta(y)$ con $W \subset V$, y por tanto $W \cap Y \subset V \cap Y = U$. ■

Como ocurre con las bases de abiertos, este proceso no asegura que se obtengan bases de entornos óptimas. Es conveniente observar la base de entornos que resulta y pensar si es posible mejorarla.

2.5. Conjuntos de puntos notables

Si (X, T) es un espacio topológico y $Z \subset Y \subset X$, los conjuntos de puntos notables de Z en (Y, T_Y), que denotaremos por $Int_Y(Z)$, $Ext_Y(Z)$, $Fr_Y(Z)$, $Cl_Y(Z)$, $Ais_Y(Z)$ y $Der_Y(Z)$, están relacionados con los respectivos conjuntos de puntos notables de Z en (X, T). De hecho están totalmente determinados, salvo en el caso del interior y la frontera.

Proposición 2.5.1 *Dado (X, T) espacio topológico y $Z \subset Y \subset X$, entonces:*

a) $Ext_Y(Z) = Ext(Z) \cap Y$.

b) $Int_Y(Z) \supset Int(Z) \cap Y$.

c) $Cl_Y(Z) = Cl(Z) \cap Y$.

d) $Fr_Y(Z) \subset Fr(Z) \cap Y$.

e) $Ais_Y(Z) = Ais(Z) \cap Y$.

f) $Der_Y(Z) = Der(Z) \cap Y$.

Demostración:

Teniendo en cuenta que $U \in Ent_Y(y)$ si y sólo si existe $V \in Ent(y)$ tal que $U = V \cap Y$ (Proposición 2.4.1) es fácil probar todas las igualdades y contenidos que se afirman. Por tanto se deja la demostración como ejercicio. ■

En general no es cierto que $Int_Y(Z) = Int(Z) \cap Y$.

Ejemplo 2.5.1 Considerando sobre el conjunto de los números naturales la topología $T = \{A \subset \mathbb{N} \;/\; \{1,2\} \subset A\} \cup \{\emptyset\}$ e $Y = \{5,6,7\}$, ocurre que T_Y coincide con la topología discreta en Y. Tomando $Z = \{5\}$ se tiene que $Int_Y(Z) = \{5\} = Z$, pero $Int(Z) = \emptyset$.

Tampoco es cierto, en general, que $Fr_Y(Z) = Fr(Z) \cap Y$.

Ejemplo 2.5.2 Tomando el mismo espacio topológico $(\mathbb{N}, T)$ del Ejemplo 2.5.1 anterior, con $Y = \{5,6,7\}$ y $Z = \{5\}$ tenemos que $Fr_Y(Z) = \emptyset$ mientras que $Fr(Z) \cap Y = \{5\}$.

Es posible estudiar la densidad de un subconjunto de un subespacio topológico considerando las propiedades de dicho subconjunto en el espacio original.

Proposición 2.5.2 Si (X, T) es un espacio topológico y $Z \subset Y \subset X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Z es denso en Y.

b) $Y \subset Cl(Z)$.

b) $Ext(Z) \subset X - Y$.

Demostración:

Por definición y el apartado (b) de la Proposición 2.5.1, Z es denso si y sólo si $Cl_Y(Z) = Cl(Z) \cap Y = Y$, o lo que es lo mismo $Y \subset Cl(Z)$.

Además, por el apartado (a) de la misma Proposición 2.5.1 y el (b) de la Proposición 1.5.5, Z es denso si y sólo si $Ext_Y(Z) = Ext(Z) \cap Y = \emptyset$, y esto equivale a que $Ext(Z) \subset X - Y$. ■

Capítulo 3

Continuidad y convergencia

Tanto la continuidad de funciones como la convergencia de sucesiones, en el sentido clásico, están íntimamente relacionadas con el concepto de *proximidad*. Intuitivamente, una función real de variable real es continua en un punto a cuando puntos muy cercanos a $f(a)$ provienen de puntos muy cercanos a a, y una sucesión de números reales converge a un punto x si sus términos se van acercando a x tanto como se quiera.

Pero nosotros queremos definir la continuidad de aplicaciones y la convergencia de sucesiones en espacios topológicos, donde no existe, en general, el concepto de distancia. La única posibilidad que queda es usar los entornos. Al fin y al cabo, ya hemos dicho en el Capítulo I que un entorno de un punto es un subconjunto que lo *rodea*.

3.1. Aplicaciones continuas

En adelante, denotaremos las aplicaciones $f : X \to X'$ entre espacios topológicos (X, T) y (X', T') simplemente por $f : (X, T) \to (X', T')$.

Definición 3.1.1 Una aplicación $f : (X, T) \to (X', T')$ se dirá *continua en el punto* $x \in X$ cuando para todo $U \in Ent(f(x))$ existe $V \in Ent(x)$ tal que $f(V) \subset U$.

Ya hemos visto cómo, en muchas ocasiones, una base de entornos puede sustituir con garantías a la familia de todos los entornos de un punto. Esto ocurre también al trabajar con continuidad.

Proposición 3.1.1 *Dada una aplicación $f : (X, T) \to (X', T')$, si $\beta(x)$ y $\beta(f(x))$ son bases de entornos de los puntos $x \in X$ y $f(x) \in X'$, respectivamente, entonces f es continua en x si y sólo si para todo $U \in \beta(f(x))$ existe $V \in \beta(x)$ con $f(V) \subset U$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $U \in \beta(f(x))$ entonces $U \in Ent(f(x))$. Por hipótesis, existe $V' \in Ent(x)$ con $f(V') \subset U$. Por definición de base de entornos, existe $V \in \beta(x)$ tal que $V \subset V'$, de donde $f(V) \subset f(V') \subset U$.

($\Leftarrow$) Si $U \in Ent(f(x))$ entonces existe $U' \in \beta(f(x))$ tal que $U' \subset U$. Por hipótesis, existe $V \in \beta(x)$ con $f(V) \subset U' \subset U$. Como $\beta(x) \subset Ent(x)$, esta implicación queda demostrada.

■

Es fácil probar que $Ent(x)$ es una base de entornos del punto x en cualquier espacio topológico (X, T). Teniendo en cuenta esto y la Proposición 3.1.1 anterior, podemos afirmar que f es continua en x si y sólo si se verifica alguna de las siguientes afirmaciones:

- Para todo $U \in \beta(f(x))$ existe $V \in Ent(x)$ con $f(V) \subset U$.
- Para todo $U \in Ent(f(x))$ existe $V \in \beta(x)$ con $f(V) \subset U$.

Así, como en un espacio métrico las bolas abiertas centradas en un punto forman una base de entornos de ese punto (Ejemplo 1.4.11), dadas aplicaciones entre espacios topológicos de los cuales alguno es un espacio métrico, la noción de continuidad se puede expresar de una forma particular. Además, en el caso de que ambos espacios sean métricos se obtiene la definición clásica de continuidad en un punto.

- Si X es un espacio métrico con distancia d, una aplicación $f : (X, T_d) \to (X', T')$ es continua en $x \in X$ si y sólo si para todo $U \in Ent(f(x))$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset U$.

- Si X' es un espacio métrico con distancia d', una aplicación $f : (X,T) \to (X',T_{d'})$ es continua en $x \in X$ si y sólo si para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $V \in Ent(x)$ tal que $f(V) \subset B(f(x),\varepsilon)$.

- Si X y X' son espacios métricos con distancias asociadas d y d', respectivamente, una aplicación $f : (X,T_d) \to (X',T_{d'})$ es continua en $x \in X$ si y sólo si para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$, o equivalentemente si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ implica $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

A partir del concepto de continuidad puntual, puede introducirse otro más general de continuidad de aplicaciones.

Definición 3.1.2 Una aplicación $f : (X,T) \to (X',T')$ se dice *continua* si lo es en todo punto $x \in X$.

Según esto, puede parecer complicado comprobar si una aplicación es continua, pues habría que estudiar la continuidad en cada punto del espacio de partida. Sin embargo, usando el concepto de conjunto abierto (o el de cerrado) nos podemos liberar de este problema.

Proposición 3.1.2 *Dada una aplicación $f : (X,T) \to (X',T')$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) f es continua.

b) La antimagen por f de cualquier abierto es un abierto.

c) La antimagen por f de cualquier cerrado es un cerrado.

Demostración:

Vamos a probar la cadena de implicaciones $(a) \overset{(1)}{\Rightarrow} (b) \overset{(2)}{\Rightarrow} (c) \overset{(3)}{\Rightarrow} (a)$.

(1) Consideremos $A \in T'$, y veamos que $f^{-1}(A)$ es entorno de todos sus puntos (apartado (a) de la Proposición 1.4.1). Si $x \in f^{-1}(A)$ entonces $f(x) \in A$, y por tanto $A \in Ent(f(x))$. Por (a) existe $V \in Ent(x)$ tal que $f(V) \subset A$. Así, para todo $x \in f^{-1}(A)$ existe $V \in Ent(x)$ tal que $V \subset f^{-1}(A)$.

(2) Si $C \in \mathcal{C}'$ entonces $X' - C \in T'$, y aplicando (b) se tiene que $f^{-1}(X' - C) \in T$. Por tanto $f^{-1}(C) = f^{-1}(X' - (X' - C)) = X - (f^{-1}(X' - C))$ es un cerrado.

(3) Si $x \in X$ y $U \in Ent(f(x))$, existe $A \in T'$ tal que $f(x) \in A \subset U$. Entonces $x \in f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(A) \in T$, pues $X - (f^{-1}(A)) = f^{-1}(X' - A)$ es cerrado por (c). De donde $f^{-1}(A) \in Ent(x)$ y $f(f^{-1}(A)) \subset A \subset U$.

■

Incluso podemos afinar más, y en lugar de trabajar con todos los abiertos hacerlo sólo con abiertos básicos.

Proposición 3.1.3 *Dada una aplicación $f : (X, T) \to (X', T')$ y una base $\mathcal{B}'$ de T', entonces f es continua si y sólo si $f^{-1}(B) \in T$ para todo $B \in \mathcal{B}'$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $B \in \mathcal{B}'$. Como $\mathcal{B}' \subset T'$ se tiene que $B \in T'$, y por hipótesis $f^{-1}(B) \in T$.

($\Leftarrow$) Si $A \in T'$ entonces existen $\{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}'$ tal que $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Por tanto $f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in T$.

■

Ejemplo 3.1.1 Si Y es un subespacio de un espacio topológico (X, T), la aplicación inclusión $i : (Y, T_Y) \hookrightarrow (X, T)$ es continua. Esto se prueba fácilmente sin más que tener en cuenta que la antimagen por la inclusión de un subconjunto A de X es $A \cap Y$.

Ejemplo 3.1.2 Una aplicación f desde un espacio topológico indiscreto (X, T_I) en otro espacio (Y, T) es continua si y sólo si todo $A \in T$ verifica que $f(X) \subset A$ ó $f(X) \cap A = \emptyset$.

Para probarlo, teniendo en cuenta que f es continua si y sólo si la antimagen de todo abierto es un abierto, basta observar que

$f^{-1}(A) = X$ si y sólo si $f(X) \subset A$.

$f^{-1}(A) = \emptyset$ si y sólo si $f(X) \cap A = \emptyset$.

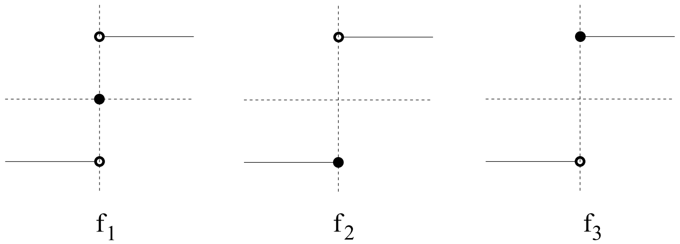
Ejemplo 3.1.3 Dados un conjunto infinito X y otro finito Y, las únicas aplicaciones continuas $f : (X, T_{cof}) \to (Y, T_D)$ son las constantes.

Si $f : (X, T_{cof}) \to (Y, T_D)$ es continua, entonces la antimagen de cualquier subconjunto cerrado debe ser un cerrado. Como los subconjuntos unitarios son cerrados en T_D, la antimagen de todo subconjunto unitario de Y es un cerrado. Pero sabemos que el conjunto de cerrados en la topología cofinita es $\mathcal{C}_{cof} = \{F \subset X \ / \ F \ finito\} \cup \{X\}$, luego debe verificarse una de las siguientes afirmaciones:

- La antimagen de algún subconjunto unitario de Y es X, con lo cual f es una aplicación constante.

- O bien la antimagen de todo subconjunto unitario de Y es un subconjunto finito de X, lo cual es imposible porque entonces $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\bigcup_{y \in Y} \{y\}) = \bigcup_{y \in Y} (f^{-1}(\{y\}))$ sería un conjunto finito.

Ejemplo 3.1.4 Sean las aplicaciones $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = \frac{x}{|x|}$ para $x \neq 0$, con $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = -1$ y $f_3(0) = 1$.



Si consideramos $f_1, f_2, f_3 : (\mathbb{R}, T_u) \to (\mathbb{R}, T_u)$ ninguna de las tres aplicaciones es continua, pues $f_1^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = \{0\} \notin T_u$, $f_2^{-1}((-2, 0)) = (-\infty, 0] \notin T_u$ y $f_3^{-1}((0, 2)) = [0, \infty) \notin T_u$. (Aplicar la Proposición 3.1.3).

Ejemplo 3.1.5 Tomando como topología de partida la de Sorgenfrey para las aplicaciones del ejemplo anterior, es decir, $f_1, f_2, f_3 : (\mathbb{R}, T_{\mathcal{S}}) \to$

$(\mathbb{R}, T_u)$, la intuición puede llevarnos a equívocos. Como $f_1^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = \{0\} \notin T_{\mathcal{S}}$ y $f_2^{-1}((-2, 0)) = (-\infty, 0] \notin T_{\mathcal{S}}$, de la Proposición 3.1.3 se deduce que f_1 y f_2 no son continuas. En cambio, dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, como

$$f_3^{-1}((a,b)) = \begin{cases} \emptyset & si\ -1 \notin (a,b)\ y\ 1 \notin (a,b) \\ (-\infty, 0) & si\ -1 \in (a,b)\ y\ 1 \notin (a,b) \\ [0, \infty) & si\ -1 \notin (a,b)\ y\ 1 \in (a,b) \\ \mathbb{R} & si\ -1 \in (a,b)\ y\ 1 \in (a,b) \end{cases}$$

se concluye, de nuevo por la Proposición 3.1.3, que f_3 sí es continua en este caso.

El resultado que se presenta a continuación nos proporciona una gran cantidad de ejemplos de aplicaciones continuas.

Proposición 3.1.4 *Las identidades $1_X : (X, T) \to (X, T)$, las composiciones de aplicaciones continuas y las aplicaciones constantes son continuas. Además, dada $f : (X, T) \to (X', T')$:*

a) Si $T = T_D$ ($\equiv$ topología discreta) entonces f es continua.

b) Si $T' = T_I$ ($\equiv$ topología indiscreta) entonces f es continua.

c) Si f es continua e $Y \subset X$ entonces $f_{|Y} : (Y, T_Y) \to (X', T')$ es también continua.

d) Si f es continua y $f(X) \subset Y \subset X'$ entonces $f : (X, T) \to (Y, T'_Y)$ es también continua.

Demostración:

Las identidades son evidentemente continuas. Para la composición, basta observar que dadas aplicaciones $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ y $A \subset Z$ entonces $(gf)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Las aplicaciones constantes son continuas porque la antimagen de cualquier subconjunto por una aplicación constante es el total o el vacío. Además:

(a) Si $T = T_D = \mathcal{P}(X)$, la antimagen de cualquier subconjunto de X' (y en particular de cualquier abierto) es un abierto, al ser un subconjunto de X.

(b) Si $T' = T_I = \{\emptyset, Y\}$, como $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T$ y $f^{-1}(Y) = X \in T$ se tiene que la antimagen de cualquier abierto es abierto.

(c) Si $A \in T'$ entonces $f_{|Y}^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap Y \in T_Y$, pues $f^{-1}(A) \in T$ al ser f continua.

(d) Si $A \in T'_Y$ entonces $A = A' \cap Y$, con $A' \in T'$. Por tanto $f^{-1}(A) = f^{-1}(A' \cap Y) = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(A') \cap X = f^{-1}(A') \in T$, pues $A' \in T'$ y f es continua.

■

En los apartados (a) y (b) de la Proposición 3.1.4 anterior, hemos visto que toda aplicación partiendo de un espacio topológico discreto o llegando a un espacio topológico indiscreto es continua. Pero estos casos son extremos, puesto que la topología discreta es la más fina que existe sobre un conjunto y la indiscreta la menos fina. Este razonamiento da pie a las siguientes definiciones.

Definición 3.1.3 Dada una aplicación $f : X \to X'$,

a) Si T es una topología sobre X, se llama *topología final asociada a f*, denotada por T_f, a la topología más fina sobre X' tal que $f : (X, T) \to (X', T_f)$ es continua.

b) Si T' es una topología sobre X', se llama *topología inicial asociada a f*, denotada por T^f, a la topología menos fina sobre X tal que $f : (X, T^f) \to (X', T')$ es continua.

Proposición 3.1.5 *Dada una aplicación $f : X \to X'$,*

a) Si (X, T) es un espacio topológico entonces la topología final asociada a f es

$$T_f = \{A \subset X' \;/\; f^{-1}(A) \in T\}$$

a) Si (X', T') es un espacio topológico, entonces la topología inicial asociada a f es

$$T^f = \{f^{-1}(A) \;/\; A \in T'\}$$

Demostración:

Se deja como ejercicio. ■

Un forma clásica de definir una aplicación continua es hacerlo "a trozos", esto es partiendo de varias aplicaciones que sean continuas en subconjuntos del conjunto de partida y pegándolas adecuadamente. Este proceso, conocido como *lema de continuidad*, es también válido en espacios topológicos. Nótese que se hace uso del concepto de recubrimiento, introducido en el Apéndice A.

Proposición 3.1.6 *Sea (X,T) un espacio topológico y $\{F_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento de X por subconjuntos cerrados. Si para $1 \leq i \leq n$ ocurre que $f_i : (F_i, T_{F_i}) \to (X', T')$ es una aplicación continua y $f_{i|F_i \cap F_j} = f_{j|F_i \cap F_j}$ para $i \neq j$, entonces $f : (X,T) \to (X',T')$ definida por $f(x) = f_i(x)$ si $x \in F_i$ es también una aplicación continua.*

Demostración:

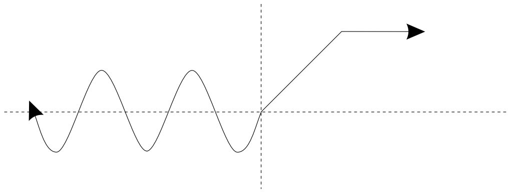
Probaremos el resultado para $n = 2$, pues la generalización al caso de un número finito de cerrados es evidente. Para ello, usaremos que la antimagen de todo cerrado por una aplicación continua es un cerrado (apartado (c) de la Proposición 3.1.2).

Es aplicación, porque $f_{i|F_i \cap f_j} = f_{j|F_i \cap F_j}$ para todo $i \neq j$.

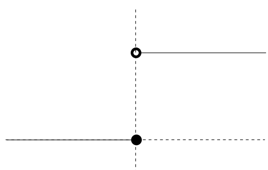
Si $C \in \mathcal{C}_{X'}$ entonces $f^{-1}(C) = f_1^{-1}(C) \cup f_2^{-1}(C)$. Como f_1 y f_2 son continuas, $f_1^{-1}(C) \in \mathcal{C}_{F_1}$ y $f_2^{-1}(C) \in \mathcal{C}_{F_2}$. Por la Proposición 2.3.2, como $F_1, F_2 \in \mathcal{C}_X$, se tiene que $f_1^{-1}(C)$ y $f_2^{-1}(C)$ son también cerrados en X, y como la unión finita de cerrados es cerrado se concluye que $f^{-1}(C) \in \mathcal{C}_X$. ■

Ejemplo 3.1.6 Se consideran (X,T) y (X',T') espacios topológicos, donde $X = \{a,b,c,d\}$, $X' = \{a,b,c\}$, $T = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}\}$ y $T' = \{\emptyset, X', \{a,b\}\}$. Tomamos $f_1 : A = \{a,b,d\} \to X'$ y $f_2 : B = \{a,c\} \to X'$ definidas por $f_1(a) = f_2(a) = a$, $f_1(b) = b$, $f_1(d) = c$ y $f_2(c) = b$. Aunque f_1 y f_2 son continuas y coinciden en $A \cap B$, como A y B no son cerrados no es posible aplicar el lema de continuidad. De hecho la aplicación que resultaría de hacerlo no es continua.

Ejemplo 3.1.7 Considerando la topología usual sobre $\mathbb{R}$, y la inducida por ésta en los subconjuntos que se indican, se definen $f_1 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ por $f_1(x) = sen\ x$, $f_2 : [0, 2] \to \mathbb{R}$ por $f_2(x) = x$ y $f_3 : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ por $f_3(x) = 2$. Estas aplicaciones están en las condiciones del lema de continuidad, luego la aplicación f que se representa a continuación es también continua.



Ejemplo 3.1.8 Tomando de nuevo la topología usual sobre $\mathbb{R}$, aunque las aplicaciones constantes $f_1 = C_0 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ y $f_2 = C_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ son continuas, no definen una aplicación continua en todo $\mathbb{R}$. Y es que el lema de continuidad no es aplicable, pues si bien $(-\infty, 0]$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ en cambio $(0, \infty)$ no lo es.



Lo mismo ocurre con las aplicaciones constantes $f_1 = C_0 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ y $f_2 = C_1 : \mathbb{R} - \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, pues ni $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ son cerrados.

Hay otra versión del lema de continuidad en la cual se exige que la familia de subconjuntos de X considerada esté formada por abiertos, en lugar de cerrados. En este caso, no es necesario que dicha familia sea finita. Se enuncia sin demostración, pues ésta es similar a la hecha para la Proposición 3.1.6.

Proposición 3.1.7 *Sea* (X, T) *un espacio topológico y* $\{A_i\}_{i \in I} \subset T$ *con* $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. *Si para todo* $i \in I$ *ocurre que* $f_i : (A_i, T_{A_i}) \to (X', T')$

es una aplicación continua y $f_{i|A_i \cap A_j} = f_{j|A_i \cap A_j}$ *para* $i \neq j$*, entonces* $f : (X, T) \to (X', T')$ *definida por* $f(x) = f_i(x)$ *si* $x \in A_i$ *es también continua.*

3.2. Aplicaciones abiertas y cerradas

Además de la continuidad las aplicaciones pueden verificar otras propiedades relacionadas con la topología, que serán de utilidad, como veremos en capítulos posteriores.

Definición 3.2.1 Se dirá que una aplicación entre espacios topológicos es *abierta* cuando la imagen de cualquier abierto sea un abierto. Además, una aplicación entre espacios topológicos se dirá *cerrada* cuando la imagen de cualquier cerrado sea un cerrado.

Como viene ocurriendo de manera habitual, es posible sustituir en la anterior definición los abiertos por abiertos básicos.

Proposición 3.2.1 *Dada una aplicación* $f : (X, T) \to (X', T')$ *y una base* $\mathcal{B}$ *de* T*, entonces* f *es abierta si y sólo si* $f(B) \in T$ *para todo* $B \in \mathcal{B}$*.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $B \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B} \subset T$ se tiene que B es un abierto, y por hipótesis su imagen también lo es.

($\Leftarrow$) Si $A \in T$ entonces existen $\{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Por tanto $f(A) = f(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f(B_i) \in T'$.

■

Ejemplo 3.2.1 Consideremos una topología cualquiera T sobre un conjunto finito no vacío X, y un conjunto infinito Y. Teniendo en cuenta que la imagen de cualquier subconjunto de X tiene que ser, a la fuerza, un subconjunto finito de Y, es claro que ninguna aplicación $f : (X, T) \to (Y, T_{cof})$ va a ser abierta (pues $f(X) \notin T_{cof}$). Sin embargo cualquier aplicación entre estos espacios sí va a ser cerrada.

Ejemplo 3.2.2 La aplicación $f : (\mathbb{R}, T_u) \to (\mathbb{R}, T_u)$ definida por $f(x) = e^x$ es abierta, porque $f((a,b)) = (e^a, e^b)$. Sin embargo no es cerrada, como se demuestra observando que $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Como ocurría con la continuidad, podemos enunciar un resultado que nos provea de multitud de ejemplos de aplicaciones abiertas y cerradas.

Proposición 3.2.2 *La identidades $1_X : (X,T) \to (X,T)$ y las composiciones de aplicaciones abiertas (resp. cerradas) son aplicaciones abiertas (resp. cerradas). Además, dada $f : (X,T) \to (X',T')$:*

a) Si f es sobre y $T = T_I$ ($\equiv$ topología indiscreta) entonces f es abierta y cerrada.

b) Si $T' = T_D$ ($\equiv$ topología discreta) entonces f es abierta y cerrada.

Hemos visto que una aplicación puede ser abierta y no cerrada, o cerrada y no abierta. Sin embargo, cuando la aplicación es biyectiva ambas propiedades son equivalentes.

Proposición 3.2.3 *Dada una aplicación biyectiva $f : (X,T) \to (X',T')$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) f es abierta.

b) f es cerrada.

c) f^{-1} es continua.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ *b)* Si $C \subset X$ es un cerrado entonces $f(C) = f(X-(X-C)) = X' - (f(X-C))$ es un cerrado, pues $f(X-C) \in T'$ por hipótesis.

b) $\Rightarrow$ *c)* Si $C \subset X$ es un cerrado entonces $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$ es un cerrado por hipótesis, y por tanto f^{-1} es continua.

c) $\Rightarrow$ *a)* Si $A \subset X$ es un abierto entonces $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ es un abierto, pues f^{-1} es continua por hipótesis.

■

3.3. Homeomorfismos

A continuación vamos a ver una de las definiciones fundamentales en topología general.

Definición 3.3.1 Una aplicación f entre espacios topológicos se dirá *homeomorfismo* cuando sea biyectiva, continua y además f^{-1} sea también continua. Dos espacios se dirán *homeomorfos* cuando exista un homeomorfismo entre ellos.

De esta definición se deduce inmediatamente que una aplicación biyectiva es un homeomorfismo si y sólo si lo es su inversa.

Cuando dos espacios topológicos sean homeomorfos se usará la notación $(X,T) \cong (Y,T')$, o simplemente $X \cong Y$.

Ahora bien, ¿por qué es tan importante el concepto de homeomorfismo? Su propio nombre nos proporciona la respuesta. *Homeo-morfo* puede ser traducido por *semejante-forma*, y como la topología es la ciencia de la forma, los espacios que estén relacionados por un homeomorfismo van a ser indistinguibles desde el punto de vista topológico. Así, se puede decir que la topología estudia lo que es invariante bajo homeomorfismos, como la teoría de grupos lo invariante bajo isomorfismos de grupos, la geometría proyectiva lo invariante por transformaciones proyectivas, etc.

Es por esto que se denominarán *propiedades topológicas* a aquéllas que se conserven mediante homeomorfismos. Una manera más formal de presentar este concepto es la siguiente.

Definición 3.3.2 Una propiedad P se dirá *topológica* cuando

$$(X,T)\ verifica\ P\ y\ (X,T) \cong (X',T') \ \Rightarrow\ (X',T')\ verifica\ P$$

Dejamos como ejercicio al lector probar que “ser metrizable” es una propiedad topológica.

Como consecuencia inmediata de la Proposición 3.2.3, se tienen las siguientes caracterizaciones.

Proposición 3.3.1 *Es equivalente decir que una aplicación entre espacios topológicos es un homeomorfismo a decir que es biyectiva, continua y abierta, o bien que es biyectiva, continua y cerrada.*

Para obtener ejemplos, es bueno conocer previamente las siguientes propiedades, de fácil demostración.

Proposición 3.3.2 *La identidades y las composiciones de homeomorfismos son homeomorfismos. Además, dado un homeomorfismo $f : (X, T) \to (X', T')$ e $Y \subset X$ entonces la restricción $f_{|Y} = (Y, T_Y) \to (f(Y), T'_{f(Y)})$ es también un homeomorfismo.*

La última parte de esta Proposición 3.3.2 tiene una consecuencia directa que suele ser muy útil para determinar si ciertos espacios son homeomorfos o no.

Corolario 3.3.1 *Si $f : (X, T) \to (Y, T')$ es un homeomorfismo y $x \in X$ entonces $f_{|X-\{x\}} : (X - \{x\}, T_{X-\{x\}}) \to (Y - \{f(x)\}, T_{Y-\{f(x)\}})$ es un homeomorfismo.*

Ejemplo 3.3.1 Si dos conjuntos tienen diferente cardinal, es imposible asociarles topologías de forma que los espacios topológicos resultantes sean homeomorfos, pues al no existir ninguna aplicación biyectiva entre los conjuntos tampoco existe ningún homemorfismo entre los espacios. Pero también es posible que dos espacios topológicos cuyos conjuntos asociados tengan igual cardinal no sean homeomorfos.

Por otro lado, cabe destacar que todo homeomorfismo proporciona una relación *uno a uno* entre los abiertos de las dos topologías que relaciona, pues tanto él como su inverso transforman abiertos distintos en abiertos distintos. Así basta considerar dos topologías con distinto cardinal sobre un conjunto X, para tener dos espacios topológicos no homeomorfos sobre el mismo conjunto.

Ejemplo 3.3.2 Considerando $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, con $T = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b, d\}\}$ y $T' = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, la aplicación $f_1 : (X, T) \to (Y, T')$ definida por $f(a) = 3$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$ y $f(d) = 2$

es un homeomorfismo. Sin embargo $f_2 : (X, T) \to (Y, T')$ definida por $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ y $f(d) = 4$ no lo es (aunque es biyectiva, no es abierta ni cerrada).

Ejemplo 3.3.3 Los espacios $(\mathbb{R}, T_{cof})$ y $(\mathbb{R}, T_{\{0\}})$ no son homeomorfos, donde $T_{\{0\}}$ representa la topología de superconjuntos del $\{0\}$. Para probarlo basta observar que $\{0\} \in T_{\{0\}}$, y dada cualquier aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siempre ocurrirá que $f(\{0\}) = \{f(0)\} \notin T_{cof}$, luego no existe ninguna aplicación abierta $f : (\mathbb{R}, T_{\{0\}}) \to (\mathbb{R}, T_{cof})$.

Ejemplo 3.3.4 Con la topología inducida por la usual, los intervalos del mismo tipo son homeomorfos.

- La aplicación $f(t) = c + \frac{(d-c)(t-a)}{b-a}$, con inversa definida por $f^{-1}(t) = a + \frac{(b-a)(t-c)}{d-c}$ hace que $[a, b] \cong [c, d]$, $[a, b) \cong [c, d)$, $(a, b] \cong (c, d]$ y $(a, b) \cong (c, d)$.

- La aplicación $f(t) = b + t - a$, con inversa definida por $f^{-1}(t) = a + t - b$ hace que $[a, \infty) \cong [b, \infty)$, $(a, \infty) \cong (b, \infty)$ $(-\infty, a] \cong (-\infty, b]$ y $(-\infty, a) \cong (-\infty, b)$.

Ejemplo 3.3.5 La recta real usual es homeomorfa a sus subespacios del tipo (a, b). Por un lado la aplicación restricción de la tangente $f = tag_{|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo con inverso definido por $f^{-1}(x) = arctag\ x$. Como además todos los intervalos abiertos y acotados son homeomorfos y la composición de homeomorfismos es homeomorfismo (Proposición 3.3.2) se concluye el resultado.

Ejemplo 3.3.6 Tomando como referencia los homeomorfismos de los ejemplos anteriores, se deja como ejercicio probar que $[a, b) \cong [c, \infty)$, $(a, b) \cong (c, \infty)$, $(a, b] \cong (-\infty, c]$ y $(a, b) \cong (-\infty, c)$.

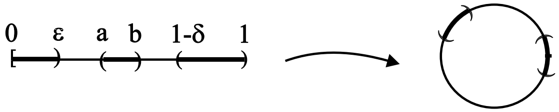
Ejemplo 3.3.7 La aplicación exponencial $exp : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $exp(t) = e^{2\pi it}$ (con las topologías usuales) no es homeomorfismo, puesto que no es inyectiva (si $t' = t + k$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $exp(t) = exp(t')$).

Ejemplo 3.3.8 Quien haya estudiado algún curso elemental de cálculo real debe conocer el siguiente resultado:

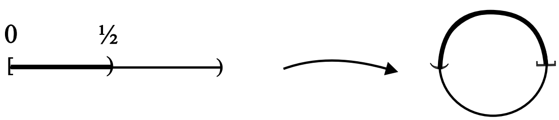
Toda función real de variable real continua y biyectiva tiene inversa continua.

Si este resultado fuese extrapolable a espacios topológicos, o simplemente a espacios métricos, parece que podríamos solucionar el problema anterior restringiendo el conjunto de partida. Consideremos entonces $exp_{|[0,1)} : [0,1) \to S^1$.

- Esta aplicación es biyectiva, claramente.
- Es continua, pues la antimagen de un arco abierto (estos arcos forman una base de la topología usual de S^1) será un intervalo abierto $(a,b) \subset [0,1)$, si el punto $(1,0)$ no pertenece al arco, o un conjunto de la forma $[0, 0+\varepsilon) \cup (1-\delta, 1)$, si el punto $(1,0)$ pertenece al arco.



- Pero no es abierta. Por ejemplo $exp([0, \frac{1}{2}))$ es un arco semiabierto, que no es un abierto en la topología usual de la circunferencia.



Por tanto hemos probado que el anterior resultado de análisis real no puede ser trasladado a espacios topológicos, ni siquiera cuando son subespacios de $\mathbb{R}^n$ con la topología usual.

Si tenemos en cuenta que los homeomorfismos son aplicaciones biyectivas que hacen corresponder de forma biunívoca los abiertos de las topologías que relacionan, es fácil probar que todo homeomorfismo transforma bases de abiertos en bases de abiertos y bases de entornos de un punto en bases de entornos de su imagen.

Proposición 3.3.3 *Dado un homeomorfismo $f : (X, T) \to (X', T')$:*

a) *$\mathcal{B}$ es una base de T si y sólo si $\mathcal{B}_f = \{f(B) \,/\, B \in \mathcal{B}\}$ es una base de T'.*

b) *$\beta(x)$ es una base de entornos del punto $x \in X$ si y sólo si $\beta_f(f(x)) = \{f(U) \,/\, U \in \beta(x)\}$ es una base de entornos del punto $f(x)$.*

3.4. Sucesiones y Convergencia

El concepto de sucesión real es fácilmente generalizable a un conjunto cualquiera. Si X es un conjunto, una *sucesión en* X es cualquier aplicación desde el conjunto de los números naturales en X. La imagen de un número natural n será representada por x_n, y la sucesión se denotará por $\{x_n\}$, puesto que se puede considerar como un subconjunto ordenado de X.

Más complicado es generalizar el concepto de convergencia de sucesiones, pues para hacerlo necesitamos una herramienta que sustituya a la distancia en la recta real. Pero nosotros tenemos esa herramienta, los entornos.

Definición 3.4.1 Dado un espacio topológico (X, T), se dirá que una sucesión $\{x_n\}$ en X *converge a un punto* $x \in X$ (denotado $x_n \to x$), cuando dado un entorno cualquiera de x los elementos de la sucesión pertenecen a dicho entorno desde un cierto término en adelante. Una sucesión en X se dirá *convergente* si converge a algún punto de X.

Nótese que, como suele suceder, es posible sustituir en la anterior definición entornos por entornos básicos, sin que varíe el concepto.

Ejemplo 3.4.1 Si una sucesión es *estacionaria* en un punto x de un espacio topológico (es decir, la sucesión toma únicamente el valor x de un término en adelante) entonces converge a x.

Ejemplo 3.4.2 En un espacio topológico discreto, como $\beta(x) = \{\{x\}\}$ es base de entornos del punto x, es claro que las únicas sucesiones convergentes a x son las estacionarias en x.

En el caso de un espacio topológico indiscreto, como la única base de entornos de un punto x es la formada sólo por el conjunto total, se tiene que cualquier sucesión converge a todos los puntos del espacio.

Ejemplo 3.4.3 Si en un conjunto X consideramos la topología de superconjuntos de B, sabemos que una base de entornos de un punto $x \in X$ es $\beta(x) = \{B \cup \{x\}\}$. Luego $x_n \to x$ si y sólo si la sucesión toma valores en $B \cup \{x\}$ de un término en adelante.

Ejemplo 3.4.4 Si lo que consideramos es la topología de subconjuntos de B, como una base de entornos de un punto $x \in X$ es $\beta(x) = \{\{x\}\}$ si $x \in B$, ó $\beta(x) = \{X\}$ si $x \notin B$, podemos concluir que las sucesiones convergentes a $x \in B$ son las estacionarias en x, mientras que cualquier sucesión converge a todo punto $x \notin B$.

Ejemplo 3.4.5 En (X, T_{cof}), con X un conjunto infinito, $x_n \to x$ si y sólo si todo valor distinto de x se repite como máximo un número finito de veces en la sucesión. Probémoslo.

Si un valor $y \neq x$ se repite infinitas veces entonces considerando $U = X - \{y\} \in Ent(x)$ ocurre que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n > n_0$ tal que $x_n = y \notin U$. Luego $x_n \nrightarrow x$.

Sin embargo, si todo valor distinto de x se repite únicamente un número finito de veces, para todo $U = X - \{y_1, y_2, ..., y_m\} \in Ent(x)$ ocurrirá que, para $1 \leq i \leq m$, existirá $x_{n_i} \equiv$ último término de la sucesión que toma el valor y_i. Tomando $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2, ..., n_m\} + 1$ se tiene que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Luego $x_n \to x$.

Ejemplo 3.4.6 Si en un conjunto no contable consideramos la topología cocontable

$$T_{cc} = \{A \subset X \ / \ X - A \ \textit{es contable}\} \cup \{\emptyset\}$$

entonces las únicas sucesiones convergentes son las estacionarias.

Efectivamente, si $\{x_n\}$ no es estacionaria, para cualquier punto $x \in X$ basta considerar el entorno $U = X - \{y \in \{x_n\} \mathbin{/} y \neq x\}$ para llegar a que $x_n \nrightarrow x$.

Ejemplo 3.4.7 Si (X, d) es un espacio métrico, usando como base de entornos de un punto $x \in X$ la formada por las bolas centradas en ese punto, la definición de convergencia que resulta coincide con la clásica de $\mathbb{R}$:

Una sucesión $\{x_n\}$ converge a x en un espacio métrico (X, d) si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$, para todo $n \geq n_0$.

Como ocurre en la recta usual, si una sucesión en un espacio métrico converge lo hace a un único punto. Si $\{x_n\}$ convergiese a dos puntos distintos $x, y \in X$ ocurriría que para todo $\varepsilon > 0$ existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$ para $n \geq n_0$, y para todo $\delta > 0$ existiría $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(y, \delta)$ para $n \geq n_1$. Pero tomando $\varepsilon = \delta = \frac{d(x,y)}{2}$, como $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \delta) = \emptyset$, es imposible que se den las dos condiciones anteriores simultáneamente.

La convergencia se conserva por aplicaciones continuas.

Proposición 3.4.1 *Si una aplicación $f : (X, T) \to (X', T')$ es continua en $x \in X$ entonces para toda sucesión $x_n \to x$ se cumple que $f(x_n) \to f(x)$.*

Demostración:

Si $U \in Ent(f(x))$, como f es continua en x existe $V \in Ent(x)$ con $f(V) \subset U$. Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $x_n \in V$, y en consecuencia $f(x_n) \in f(V) \subset U$. ■

Corolario 3.4.1 *Si una aplicación $f : (X, T) \to (X', T')$ es continua entonces para toda sucesión $x_n \to x$ se cumple que $f(x_n) \to f(x)$.*

Capítulo 4

Más espacios: productos y cocientes

En este capítulo vamos descubrir nuevas formas de construir espacios topológicos a partir de otros ya existentes. Se presentan dos métodos muy útiles:

- *Topología producto*, o cómo asociar, dado un número finito de espacios topológicos, una topología al producto cartesiano de los conjuntos subyacentes.

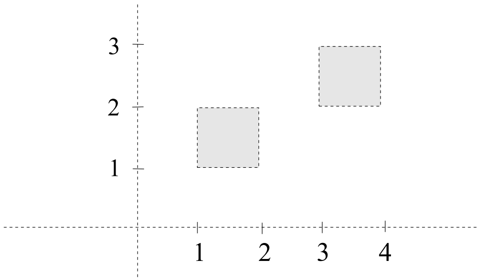
- *Topología cociente*, o cómo asociar, dado un espacio topológico y una relación de equivalencia sobre el conjunto subyacente, una topología al conjunto cociente.

4.1. Espacios producto

Como el producto cartesiano del conjunto vacío por otro conjunto cualquiera es de nuevo el conjunto vacío, vamos a considerar siempre en este capítulo el caso no trivial de topologías sobre conjuntos con algún elemento.

Dados dos espacios topológicos (X, T) e (Y, T'), si queremos asociar una topología al conjunto $X \times Y$, y cometemos el error de hacerlo sin razonar demasiado, podemos pensar que lo más natural es considerar como abiertos los productos de abiertos.

¡Pero no!. Si observamos la siguiente figura en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donde hemos supuesto fijada en $\mathbb{R}$ la topología usual, observamos que el subconjunto $(]1,2[\times]1,2[) \cup (]3,4[\times]2,3[)$ no se puede poner como producto de abiertos de T_u. Por tanto, la familia que hemos elegido no puede ser topología, pues la unión de dos de sus elementos no tiene por qué pertenecer de nuevo a la familia.



Dado que el problema está en la unión de abiertos, tenemos la herramienta para solucionarlo. Si la familia anterior verifica las condiciones de la Proposición 1.2.2 entonces, aunque no es topología, sí que generará una topología mediante uniones.

Consideremos entonces $\mathcal{B} = \{A \times A' \ / \ A \in T \ y \ A' \in T'\}$. Este subconjunto de $\mathcal{P}(X \times Y)$ verifica:

(B1) Para todo $x \in X \times Y$, existe $B_x = X \times Y \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x$.

(B2) Si $B_1 = A_1 \times A'_1$ y $B_2 = A_2 \times A'_2$ son elementos de $\mathcal{B}$, entonces para todo $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B^x_{1,2} = (A_1 \cap A_2) \times (A'_1 \cap A'_2) \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B^x_{1,2} \subset B_1 \cap B_2$. Obsérvese que $B_1 \cap B_2 = (A_1 \times A'_1) \cap (A_2 \times A'_2) = (A_1 \cap A_2) \times (A'_1 \cap A'_2) = B^x_{1,2}$.

Por tanto, ya sabemos cómo asociar una topología al conjunto $X \times Y$.

Definición 4.1.1 Dados dos espacios topológicos (X, T) e (Y, T'), se llamará *topología producto* sobre $X \times Y$ a la que tiene por base $\mathcal{B} = \{A \times A' \ / \ A \in T \ y \ A' \in T'\}$. Esta topología producto se denotará por $T * T'$.

Esto es, dados dos espacios (X, T) e (Y, T'), los abiertos de la topología producto asociada al conjunto $X \times Y$ son uniones de productos de abiertos de X e Y:

$$T * T' = \{\bigcup_{i \in I}(A_i \times A'_i) \;/\; I \equiv \text{conjunto de índices},\; A_i \in T \text{ y} A'_i \in T'\}$$

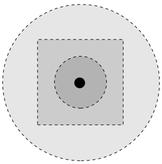
Cuando no haya posibilidad de confusión, se hablará de $X \times Y$ como el *producto de los espacios topológicos* X *e* Y.

Ejemplo 4.1.1 Sean $X = \{0, 1\}$ con la topología discreta e $Y = \{a, b\}$ con la topología indiscreta. Entonces $X \times Y = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$ y $T_D * T_I = \{\emptyset, X \times Y, \{0\} \times Y, \{1\} \times Y\}$.

Ejemplo 4.1.2 La topología producto resultante de dos topologías discretas es la topología discreta. Para comprobarlos basta observar que, dados dos espacios discretos X e Y y un punto $(x, y) \in X \times Y$, se verifica que $\{(x, y)\} = \{x\} \times \{y\}$ es un abierto de la topología producto, al ser producto de abiertos.

Ejemplo 4.1.3 Si consideramos el espacio producto de $\mathbb{R}$ con la topología usual consigo mismo, la topología resultante coincide con la topología inducida por la métrica usual de $\mathbb{R}^2$.

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es fácil comprobar que $\beta((x, y)) = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \;/\; \varepsilon > 0\}$ es una base de entornos de (x, y) en la topología producto. Por otro lado, sabemos que en una topología métrica $\beta'((x, y)) = \{B((x, y), \varepsilon) \;/\; \varepsilon > 0\}$ es una base de entornos de (x, y). Como consecuencia de la Proposición 1.4.3, se tiene que ambas topologías coinciden, sin más que observar la siguiente figura.



El proceso hecho hasta ahora puede ser generalizado para un número finito de espacios. Si (X_1, T_1),..., (X_n, T_n) son espacios topológicos, la *topología producto asociada a* $X_1 \times ... \times X_n$ se define como la que tiene por base a $\mathcal{B} = \{A_1 \times ... \times A_n \ / \ A_i \in T_i\}$, esto es:

$$T_1 * ... * T_n = \{\bigcup_{i\in I}(A_i^1 \times ... \times A_i^n) \ / \ A_i^j \in T_j \ para \ 1 \leq j \leq n\}$$

En este sentido, el ejemplo 4.1.3 anterior puede ser generalizado al producto de un número finito de copias de $\mathbb{R}$ con la topología usual. La topología producto también coincide con la engendrada por la métrica usual.

El caso del producto infinito de espacios requiere una definición especial, diferente a la que uno podría intuir, y no va a ser tratado aquí.

Es fácil comprobar que el producto finito de espacios, tal como se ha definido, es homeomorfo a todos los espacios topológicos que se pueden construir usando iteradamente el producto de dos espacios. Dicho de otra forma, el producto finito de espacios topológicos es asociativo, salvo homeomorfismo. Además, el producto de espacios topológicos es también conmutativo, salvo homeomorfismo.

Proposición 4.1.1 *Dados* X, Y *y* Z *espacios topológicos:*

a) $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z) \cong X \times Y \times Z$.

b) $X \times Y \cong Y \times X$.

Demostración:

Basta considerar los homeomorfismos canónicos dados por

$$\begin{array}{ccccc} (X \times Y) \times Z & \to & X \times (Y \times Z) & \to & X \times Y \times Z \\ ((x,y),z) & \mapsto & (x,(y,z)) & \mapsto & (x,y,z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \to & Y \times X \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$$

■

En cuanto a los cerrados en espacios producto, si bien no es posible caracterizarlos en función de los cerrados de las topologías de partida, sí que se tiene la siguiente propiedad.

Proposición 4.1.2 *El producto de cerrados es un cerrado del espacio producto.*

Demostración:

Dados F cerrado en X y G cerrado en Y entonces, usando la Proposición A.2.3, se tiene que $X \times Y - (F \times G) = ((X - F) \times Y) \cup (X \times (Y - G))$ es un abierto en el espacio producto, al ser unión de abiertos. Por tanto $F \times G$ es un cerrado en el espacio producto. ■

Aunque no todos los conjuntos de puntos notables tienen buenas propiedades con respecto al producto, sí ocurre lo siguiente.

Proposición 4.1.3 *El interior y la clausura conmutan con el producto de espacios topológicos.*

Demostración:

Sean (X, T) e (X', T') espacios topológicos, $Z \subset X$ y $Z' \subset X'$.

- Como $Int(Z) \times Int(Z')$ es un abierto de la topología producto e $Int(Z) \times Int(Z') \subset Z \times Z'$, por el apartado (b) de la Proposición 1.5.2 se tiene que $Int(Z) \times Int(Z') \subset Int(Z \times Z')$.

  Para el otro contenido, si $(x, x') \in Int(Z \times Z')$, usando la base que define la topología producto existen $A \in T$ y $A' \in T'$ tales que $(x, x') \in A \times A' \subset Z \times Z'$. En consecuencia $x \in A \subset Z$ y $x' \in A' \subset Z'$, de donde $x \in Int(Z)$ y $x' \in Int(Z')$. O lo que es lo mismo $(x, x') \in Int(Z) \times Int(Z')$.

- Como $Cl(Z) \times Cl(Z')$ es un cerrado de la topología producto (ver Proposición 4.1.2 anterior) y $Z \times Z' \subset Cl(Z) \times Cl(Z')$, por el apartado (k) de la Proposición 1.5.2 se tiene que $Cl(Z \times Z') \subset Cl(Z) \times Cl(Z')$.

  Por otro lado, si $(x, x') \in Cl(Z) \times Cl(Z')$ y $U \in Ent(x, x')$, como $\mathcal{B} = \{A \times A' \ / \ A \in T \ y \ A' \in T'\}$ es base de la topología producto, existirán $A \in T$ y $A' \in T'$ con $(x, x') \in A \times A' \subset U$. Entonces $A \in Ent(x)$ y $A' \in Ent(x')$, y por hipótesis $A \cap Z \neq \emptyset$ y $A' \cap Z' \neq \emptyset$.

Por tanto

$$\emptyset \neq (A \cap Z) \times (A' \cap Z') = (A \times A') \cap (Z \times Z') \subset U \cap (Z \times Z')$$

de donde se concluye que $(x, x') \in Cl(Z \times Z')$.

■

Una de las principales características de los productos topológicos es que las aplicaciones proyección tienen buenas propiedades.

Proposición 4.1.4 *Las proyecciones canónicas desde un espacio producto son continuas y abiertas.*

Demostración:

Consideremos la proyección $p_X : (X \times Y, T * T') \to (X, T)$.

Si $A \in T$ entonces $p_X^{-1}(A) = A \times Y \in T * T'$. Luego p_X es continua.

Si $A \in T$ y $A' \in T'$ entonces $p_X(A \times A') = A \in T$. Por la Proposición 3.2.1 se tiene que p_X es abierta.

Para la proyección $p_Y : (X \times Y, T * T') \to (Y, T')$ la demostración es análoga. ■

Cabe señalar que las anteriores proyecciones no tienen por qué ser cerradas. Por ejemplo, considerando el producto de la recta real usual consigo misma tenemos que el subconjunto $Y = \{(\frac{1}{n}, n) \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ es un cerrado en la topología producto, pero su proyección en la primera componente $p_1(Y) = \{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ no es un cerrado en la topología usual de $\mathbb{R}$.

Usando estas proyecciones, se obtiene un método para comprobar cuándo una aplicación que llega a un espacio producto es continua, sin necesidad de trabajar con topologías producto.

Proposición 4.1.5 *Una aplicación $f : (X, T) \to (Y \times Z, T' * T'')$ es continua si y sólo si $p_Y f : (X, T) \to (Y, T')$ y $p_Z f : (X, T) \to (Z, T'')$ lo son.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Evidente, pues la composición de aplicaciones continuas es continua.

($\Leftarrow$) Para usar la Proposición 3.1.3, consideramos $A' \in T'$ y $A'' \in T''$. Entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(A' \times A'') &= f^{-1}((A' \times Z) \cap (Y \times A'')) = \\ &= f^{-1}(p_Y^{-1}(A') \cap p_Z^{-1}(A'')) = \\ &= f^{-1}p_Y^{-1}(A') \cap f^{-1}p_Z^{-1}(A'') = \\ &= (p_Y f)^{-1}(A') \cap (p_Z f)^{-1}(A'') \in T \end{aligned}$$

■

Corolario 4.1.1 *Dos aplicaciones $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ son continuas si y sólo si la aplicación producto $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$, definida por $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$, lo es.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Basta usar la Proposición 4.1.5 anterior, teniendo en cuenta que $p_{X'}(f \times g) = fp_X$, $p_{Y'}(f \times g) = gp_Y$ y la composición de aplicaciones continuas es continua.

($\Leftarrow$) Es fácil comprobar que, fijado un punto $y_0 \in Y$, la aplicación $i_{y_0} : X \to X \times Y$ definida por $i_{y_0}(x) = (x, y_0)$ es continua. En consecuencia, como la composición de aplicaciones continuas es continua, se tiene que $f = p_{X'}(f \times g)i_{y_0}$ es continua. Análogamente para g.

■

Es posible obtener una base para una topología producto a partir de bases de las topologías originales y viceversa.

Proposición 4.1.6 *Dados dos espacios topológicos (X, T) e (Y, T'):*

a) Si $\{B_i\}_{i\in I}$ es una base de $T * T'$ entonces $\{p_X(B_i)\}_{i\in I}$ es una base de T y $\{p_Y(B_i)\}_{i\in I}$ es una base de T'.

b) Si $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ es una base de T y $\mathcal{B}' = \{B'_j\}_{j\in J}$ es una base de T' entonces $\mathcal{B} * \mathcal{B}' = \{B_i \times B'_j\}_{i\in I,\, j\in J}$ es una base de $T * T'$.

Demostración:

(a) Como las proyecciones son abiertas (Proposición 4.1.4) se tiene que $\{p_X(B_i)\}_{i\in I} \subset T$. Además, si $A \in T$ entonces $A \times Y \in T * T'$. Por tanto $A \times Y = \bigcup_{j\in J\subset I} B_j$, de donde $A = p_X(A\times Y) = p_X(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} p_X(B_j)$. Luego se concluye que $\{p_X(B_i)\}_{i\in I}$ es una base de T.
Análogamente, $\{p_Y(B_i)\}_{i\in I}$ es una base de T'.

(b) Todo abierto de $T * T'$ es de la forma $A = \bigcup_{k\in K}(A_k \times A'_k)$, con K un conjunto de índices, $A_k \in T$ y $A'_k \in T'$. Además $A_k = \bigcup_{i_r\in I_k\subset I} B_{i_r}$ y $A'_k = \bigcup_{j_s\in J_k\subset J} B'_{j_s}$, para todo $k \in K$. Por tanto $A_k \times A'_k = (\bigcup_{i_r\in I_k} B_{i_r}) \times (\bigcup_{i_s\in J_k} B'_{j_s}) = \bigcup_{(i_r,j_s)\in I_k\times J_k} (B_{i_r} \times B'_{j_s})$. Se concluye que $A = \bigcup_{k\in K,\ (i_r,j_s)\in I_k\times J_k} (B_{i_r} \times B'_{j_s})$, y por tanto $\mathcal{B} * \mathcal{B}'$ es una base de $T * T'$.

■

Corolario 4.1.2 *Dados dos espacios topológicos (X,T) e (Y,T') y subconjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$, el producto de las topologías inducidas $T_A * T'_B$ coincide con la topología inducida en $A \times B$ por $T * T'$.*

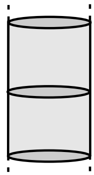
Demostración:

Para demostrar que $T_A * T'_B = (T * T')_{A\times B}$ basta comprobar que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases respectivas de T y T' entonces $(\mathcal{B} * \mathcal{B}')_{A\times B} = \mathcal{B}_A * \mathcal{B}'_B$ (ver Proposición 2.2.1). ■

El Corolario 4.1.2 anterior nos permite interpretar geométricamente ciertos espacios producto.

Ejemplo 4.1.4 El producto topológico de la circunferencia unidad S^1 por la recta real $\mathbb{R}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Usando ahora el homeomorfismo canónico existente desde $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ (ver Proposición

4.1.1) tenemos que la imagen de $S^1 \times \mathbb{R}$ (que es el cilindro geométrico $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$) es homeomorfa al espacio producto $S^1 \times \mathbb{R}$ de partida.



Con los entornos y bases de entornos todo funciona también de forma natural.

Proposición 4.1.7 *Dados dos espacios topológicos* (X,T) *e* (Y,T'), *y considerando sobre* $X \times Y$ *la topología producto.*

a) *Si* U *es un entorno de un punto* $(x,y) \in X \times Y$, *entonces* $p_X(U)$ *es un entorno de* $x \in X$ *y* $p_Y(U)$ *es un entorno de* $y \in Y$.

b) *Si* U *es un entorno de* $x \in X$ *y* V *es un entorno de* $y \in Y$ *entonces* $U \times V$ *es un entorno de* $(x,y) \in X \times Y$.

Demostración:

(a) Dado $U \in Ent((x,y))$, existe $A \in T * T'$ tal que $(x,y) \in A \subset U$. Como las proyecciones son aplicaciones abiertas se tiene que $p_X(A)$ es un abierto, y como $x \in p_X(A) \subset p_X(U)$ se concluye que $p_X(U) \in Ent(x)$.

Para la otra proyección el razonamiento es análogo.

(b) Dados $U \in Ent(x)$ y $V \in Ent(y)$, existen $A \in T$ y $A' \in T'$ tales que $x \in A \subset U$ e $y \in A' \subset V$. Como $A \times A' \in T * T'$ y $(x,y) \in A \times A' \subset U \times V$ se concluye que $U \times V \in Ent((x,y))$.

■

Proposición 4.1.8 *Dados dos espacios topológicos* (X,T) *e* (Y,T'), *y considerando sobre* $X \times Y$ *la topología producto:*

a) *Si* $\{U_i\}_{i\in I}$ *es una base de entornos de* $(x,y)\in X\times Y$ *entonces* $\{p_X(U_i)\}_{i\in I}$ *es una base de entornos de* x *y* $\{p_Y(U_i)\}_{i\in I}$ *es una base de entornos de* y*.*

b) *Si* $\beta(x)=\{U_i\}_{i\in I}$ *es una base de entornos de* $x\in X$ *y* $\beta(y)=\{V_j\}_{j\in J}$ *es una base de entornos de* $y\in Y$*, entonces* $\beta(x)*\beta(y)=\{U_i\times V_j\}_{i\in I,\,j\in J}$ *es una base de entornos de* $(x,y)\in X\times Y$*.*

Demostración:

a) Aplicando el apartado (a) de la Proposición 4.1.7 se tiene que $\{p_X(U_i)\}_{i\in I}\subset Ent(x)$.

   Además, por el apartado (*b*) de la misma Proposición 4.1.7, si $U\in Ent(x)$ entonces $U\times Y\in Ent((x,y))$. Luego existe un entorno básico U_i tal que $U_i\subset U\times Y$. Entonces $p_X(U_i)\subset p_X(U\times Y)=U$. Por tanto $\beta(x)$ es base de entornos de x.

   Análogamente para $\beta(y)$.

b) Si U_i y V_j son entornos básicos de x e y, respectivamente, por el apartado (*b*) de la Proposición 4.1.7 se tiene que $U_i\times V_j\in Ent((x,y))$.

   Además si $U\in Ent((x,y))$ entonces, por la Proposición 1.2.1, existen abiertos $A\in T$ y $A'\in T'$ de forma que $(x,y)\in A\times A'\subset U$. Pero entonces deben existir entornos básicos U_{i_0} y V_{j_0} de x e y, respectivemente, tales que $x\in U_{i_0}\subset A$ e $y\in V_{j_0}\subset A'$. Por tanto $U_{i_0}\times V_{j_0}\subset A\times A'\subset U$, y queda probado que $\beta(x)*\beta(y)$ es una base de entornos de (x,y).

■

Como consecuencia del apartado (*b*) de la anterior Proposición 4.1.8, y teniendo en cuenta que la familia de todos los entornos de un punto es una base de entornos de ese punto, se deduce que $Ent(x)*Ent(y)=\{U\times V\ /\ U\in Ent(x)\ y\ V\in Ent(y)\}$ es una base de entornos del punto (x,y) en la topología producto.

Señalamos por último que la convergencia de sucesiones en espacios producto viene determinada por la convergencia en los espacios de partida.

Proposición 4.1.9 *Una sucesión* $\{(x_n, y_n)\}$ *converge a un punto* (x, y) *de un espacio producto* $X \times Y$ *si y sólo si* $\{x_n\}$ *converge a* x *en* X *e* $\{y_n\}$ *converge a* y *en* Y.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $(x_n, y_n) \to (x, y)$ entonces, como la convergencia se conserva por aplicaciones continuas (Proposición 3.4.1) y las proyecciones son continuas (Proposición 4.1.4), se concluye que $x_n = p_X((x_n, y_n)) \to x = p_X((x, y))$ e $y_n = p_Y((x_n, y_n)) \to y = p_Y((x, y))$.

($\Leftarrow$) Sean $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Como $Ent(x) * Ent(y)$ es una base de entornos de (x, y) en la topología producto (ver el apartado (b) de la Proposición 4.1.8), si $U \times U' \in Ent(x) * Ent(y)$ existirán $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_1$ e $y_n \in U'$ para todo $n \geq n_2$. Tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ se tiene que $(x_n, y_n) \in U \times U'$ para todo $n \geq n_0$. Se concluye que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. ■

4.2. Espacios cociente

Es habitual construir objetos geométricos sencillos, tales como un cilindro o un cono, pegando partes de un trozo de papel de manera adecuada. Estos son ejemplos muy simples del concepto de conjunto cociente introducido en la Definición A.4.2 a partir de una relación de equivalencia sobre un conjunto. Otro conjunto cociente muy usado es el que resulta de colapsar un subconjunto a un punto (Ejemplo A.4.1).

Pero lo que no sabemos aún es cómo, partiendo de un espacio topológico y una relación de equivalencia sobre el conjunto subyacente, asociar una topología al conjunto cociente. Para conseguir esto recordemos (apartado (a) de la Definición 3.1.3) que si $f : X \to Y$ es una aplicación entre un espacio topológico (X, T) y un conjunto Y, se define la *topología final asociada a* f como la topología más fina sobre Y que hace continua a f. Esta topología viene dada explícitamente por

$$T_f = \{A \subset Y \ / \ f^{-1}(A) \in T\}$$

Obsérvese que los cerrados de T_f son aquéllos subconjuntos de Y

cuya antimagen es un cerrado.

Así, ya tenemos una forma canónica de definir topología en los conjuntos cociente.

Definición 4.2.1 Si (X, T) es un espacio topológico y R es una relación de equivalencia sobre X, considerando en el conjunto cociente la topología final T_π asociada a la proyección $\pi : X \to X/R$, el espacio topológico $(X/R, T_\pi)$ se denominará *espacio cociente de* (X, T) *por la relación de equivalencia* R.

Ejemplo 4.2.1 Dado un espacio topológico (X, T), si sobre el conjunto X se considera como relación de equivalencia la identidad, esto es, xRy si y sólo si $x = y$, entonces es fácil comprobar que $\pi : (X, T) \to (X/R, T_\pi)$ es un homeomorfismo.

Ejemplo 4.2.2 Si se considera un espacio topológico discreto (X, T_D), la topología cociente inducida por cualquier relación de equivalencia R sobre X es de nuevo la discreta, pues dado cualquier $A \subset X/R$ se tiene que $\pi^{-1}(A) \subset X$ es un abierto en T_D.

Ejemplo 4.2.3 Si lo que se considera es un espacio topológico indiscreto (X, T_I), la topología cociente inducida por cualquier relación de equivalencia R sobre X es ahora la indiscreta, pues dado $A \subset X/R$ con $\emptyset \neq A \neq X/R$ entonces $\emptyset \neq \pi^{-1}(A) \neq X$, al ser la proyección π sobre.

Ejemplo 4.2.4 Sea un conjunto X con la topología cofinita, y una relación de equivalencia R distinta de la que identifica todo par de elementos entre sí. Entonces, la topología cociente inducida por R es de nuevo la cofinita si y sólo si la clase de equivalencia de todo punto de X es un conjunto finito.

En efecto, si la topología cociente inducida por R es la cofinita entonces los subconjuntos unitarios de X/R son cerrados. Así, al ser π continua, si $[x] \in X/R$ entonces $\pi^{-1}(\{[x]\}) = [x]$ es un cerrado en la topología cofinita. Pero como $[x] \neq X$, al no relacionarse todos los puntos entre sí, debe ocurrir que $[x]$ sea un conjunto finito.

Recíprocamente, si la clase de equivalencia de todo punto es un conjunto finito entonces $T_\pi = T_{cof}$, pues:

($\subset$) Si $A \in T_\pi - \{\emptyset, X/R\}$ entonces su complementario es finito, pues en caso contrario

$$\pi^{-1}(A) = \pi^{-1}(X/R - (X/R - A)) = X - \pi^{-1}(X/R - A) \notin T_{cof}$$

al ser $\pi^{-1}(X/R - A) = \bigcup_{[x]\in X/R-A} [x]$ una unión infinita de conjuntos finitos y disjuntos distinta de X, pues $A \neq X/R$.

($\supset$) Si $A \in T_{cof} - \{\emptyset, X/R\}$ entonces tiene complementario finito, y por tanto

$$\pi^{-1}(A) = \pi^{-1}(X/R - (X/R - A)) = X - \pi^{-1}(X/R - A) \in T_{cof}$$

al ser $\pi^{-1}(X/R - A) = \bigcup_{[x]\in X/R-A} [x]$ unión finita de conjuntos finitos.

Hemos comentado que una conocida relación de equivalencia sobre un conjunto resulta al colapsar un subconjunto dado en un punto. Esto es, dado $Y \subset X$ se puede definir una relación de equivalencia por xRy si y sólo si $x = y$ ó $x, y \in Y$. Este espacio cociente se suele denotar por X/Y.

La siguiente propiedad permite probar que determinadas proyecciones en este tipo de cocientes son abiertas o cerradas.

Proposición 4.2.1 *Si (X, T) es un espacio topológico e Y es un subconjunto abierto (respectivamente cerrado) entonces la proyección $\pi : X \to X/Y$ es una aplicación abierta (respectivamente cerrada).*

Demostración:

Si A es un abierto en X entonces $\pi(A)$ es un abierto en X/Y pues

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \begin{cases} A & si\ A \cap Y = \emptyset \\ Y \cup A & si\ A \cap Y \neq \emptyset \end{cases}$$

es en cualquier caso un abierto. Análogamente se prueba el caso de que Y sea cerrado, teniendo en cuenta que los cerrados de T_π son los subconjuntos de X/Y cuya antimagen es un cerrado. ■

Como hemos visto, las proyecciones son cruciales en la definición de la topología cociente. Generalizando sus principales propiedades se obtiene una familia de aplicaciones continuas, las identificaciones, que por supuesto tienen a las proyecciones en un cociente como ejemplos más significativos.

Definición 4.2.2 Se dice que una aplicación $f : (X, T) \to (Y, T')$ es una *identificación* si es sobre y $T' = T_f$. Al espacio topológico (Y, T') se le denomina *espacio identificación* de (X, T) por f.

Nótese que del hecho $T' = T_f$ se deduce que toda identificación es continua. Además, es fácil comprobar que la composición de identificaciones es una identificación.

Las identificaciones merecen un estudio por sí mismas, pues nos permitirán comprender y visualizar mejor las topologías cociente. Un primer resultado es el siguiente.

Proposición 4.2.2 Toda identificación biyectiva es un homeomorfismo.

Demostración:

Para probarlo, sólo restaría ver que cualquier identificación biyectiva $f : (X, T) \to (Y, T')$, es abierta. Efectivamente, si $A \in T$ entonces $f(A) \in T'$ porque $f^{-1}(f(A)) = A$, al ser f inyectiva. ■

Una especie de recíproco también es cierto.

Proposición 4.2.3 *Toda aplicación continua, sobre y abierta (o bien cerrada) es identificación.*

Demostración:

Veamos que si $f : (X, T) \to (Y, T')$ es una aplicación continua, sobre y abierta entonces $T' = T_f$.

($\subset$) De la continuidad de f se sigue inmediatamente que $T' \subset T_f$.

($\supset$) Si $A \in T_f$ entonces $f^{-1}(A) \in T$, y como f es abierta se tiene que $f(f^{-1}(A)) \in T'$. Como $A = f(f^{-1}(A))$, al ser f sobre, se tiene el resultado.

En el caso de ser f cerrada se procede de forma análoga. ■

Usando las proposiciones 4.2.3 y 4.1.4 se observa fácilmente que:

Corolario 4.2.1 Las proyecciones canónicas desde un espacio producto son identificaciones.

El siguiente resultado es muy útil, sobre todo a la hora de saber si una aplicación que parte de un espacio identificación es continua.

Proposición 4.2.4 Sean $(X,T) \xrightarrow{f} (Y,T') \xrightarrow{g} (Z,T'')$ aplicaciones, con f una identificación. Entonces g es continua si y sólo si gf es continua:

$$\begin{tikzcd}
(X,T) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted] & (Y,T') \arrow[d, "g"] \\
 & (Z,T'').
\end{tikzcd}$$

Demostración:

Evidentemente, si g es continua entonces gf también lo es, al ser composición de aplicaciones continuas.

Supongamos ahora que la composición gf es continua. Si $A \in T''$ debemos comprobar que $g^{-1}(A) \in T'$. Ahora bien, como f es identificación, $T' = T_f$, luego $g^{-1}(A) \in T'$ si y sólo si $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in T$. Como $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (gf)^{-1}(A)$ y gf es continua, se concluye la demostración. ■

De momento tenemos claro que toda proyección en un espacio cociente es una identificación. Pero es que además podemos suponer que todos los espacios identificación son espacios cociente y que toda identificación es una proyección sobre un determinado cociente, salvo homeomorfismo. Para probarlo usaremos el siguiente hecho, cuya demostración se deja como ejercicio.

Lema 4.2.1 *Toda aplicación $f : X \to Y$ tiene asociada una relación de equivalencia en el conjunto X definida por xRy si y sólo si $f(x) = f(y)$.*

Proposición 4.2.5 *Si R es la relación de equivalencia asociada a una identificación $f : (X, T) \to (Y, T')$, entonces existe un (único) homeomorfismo $h : (X/R, T_\pi) \to (Y, T')$ tal que $h\pi = f$.*

$$\begin{tikzcd}
(X,T) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & (Y,T') \\
 & (X/R,T_\pi) \arrow[u, "h"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Demostración:

Consideremos $h : (X/R, T_\pi) \to (Y, T')$ con $h([x]) = f(x)$. Por cómo es la relación de equivalencia, h está bien definida. Además, como π es identificación y $h\pi = f$ es continua se tiene que h es continua. Una simple comprobación demuestra que h es biyectiva.

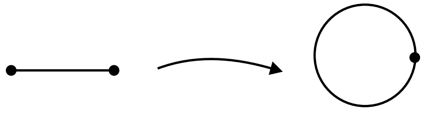
Para comprobar que h es abierta, consideremos $A \in T_\pi$. Entonces $h(A) \in T'$ si y sólo si $f^{-1}(h(A)) \in T$. Pero es sencillo ver que $f^{-1}(h(A)) = \pi^{-1}(A)$, y al ser π continua se tiene el resultado.

La unicidad de h se deduce de su definición.

■

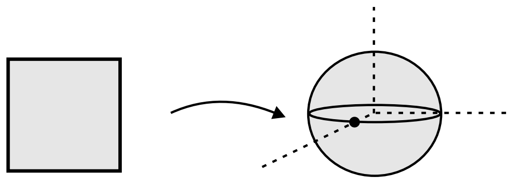
Como aplicación de este último resultado, muchos espacios cociente con sus respectivas topologías, en apariencia complicadas, se pueden reescribir como subespacios euclídeos conocidos.

Ejemplo 4.2.5 Si en el intervalo cerrado $I = [0, 1]$ se considera el subconjunto $\{0, 1\}$, podemos probar que $I/\{0, 1\}$ es homeomorfo a la circunferencia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 = 1\}$.



La aplicación $f : I \to S^1$ dada por $f(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t))$ es continua, sobre y cerrada (ver Proposición 7.9), luego por la Proposición 4.2.3 es identificación. Por otro lado la relación de equivalencia asociada a f coincide con la que colapsa $\{0,1\}$ en un punto. Aplicando la Proposición 4.2.5 anterior se concluye que $I/\{0,1\} \cong S^1$.

Ejemplo 4.2.6 Identificando en el cuadrado unidad $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ todos los puntos de la frontera entre sí se obtiene el espacio cociente $I^2/\delta(I^2)$, homeomorfo a la *esfera* $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

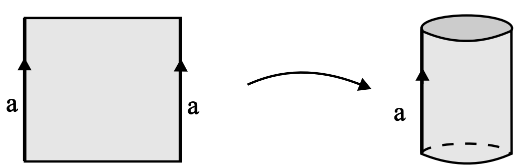


La aplicación $f : I^2 \to S^2$ dada por

$$f((t,s)) = (cos(2\pi t)cos(2\pi s), sen(2\pi t)cos(2\pi s), sen(2\pi s))$$

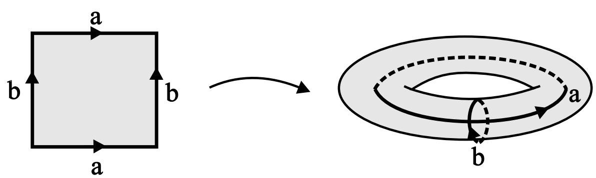
es continua, sobre y cerrada (de nuevo por la Proposición 7.9), luego por la Proposición 4.2.3 es identificación. Como la relación de equivalencia asociada a f es precisamente la que colapsa la frontera de I^2 en un punto, aplicando la Proposición 4.2.5 se tiene que $I^2/\delta(I^2) \cong S^2$.

Ejemplo 4.2.7 El *cilindro circular* $S^1 \times I \subset \mathbb{R}^3$ se obtiene también como espacio cociente sin más que considerar en el cuadrado unidad I^2 la relación de equivalencia R que identifica cada punto $(0,t)$ del lado izquierdo del borde con el correspondiente a igual altura $(1,t)$ del lado derecho.



La aplicación $f : I^2 \to S^1 \times I$ dada por $f((t,s)) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t), s)$ es continua, sobre y cerrada (Proposición 7.9) y por tanto identificación (Proposición 4.2.3). La relación de equivalencia asociada a f coincide con R, y aplicando la Proposición 4.2.5 se tiene que $I^2/R \cong S^1 \times I$.

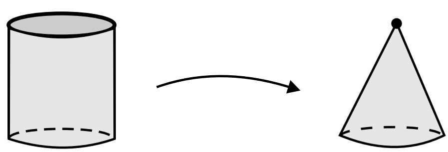
Ejemplo 4.2.8 El subespacio de $\mathbb{R}^4$, con la topología inducida por la usual conocido como el *toro*, que se define por $T = S^1 \times S^1$, es homeomorfo al espacio cociente resultante de identificar en $I \times I$ los lados opuestos.



Para probarlo se procede de forma similar a los ejemplos anteriores, esta vez usando la identificación $f : I \times I \to S^1 \times S^1$ dada por

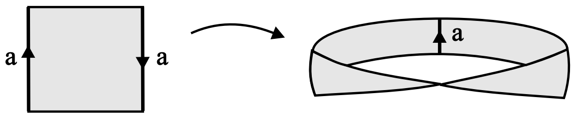
$$f((t,s)) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t), cos(2\pi s), sen(2\pi s))$$

Ejemplo 4.2.9 Si sobre el cilindro circular se colapsa el subconjunto $S^1 \times \{1\}$ a un punto resulta un espacio cociente denominado *cono de* S^1.



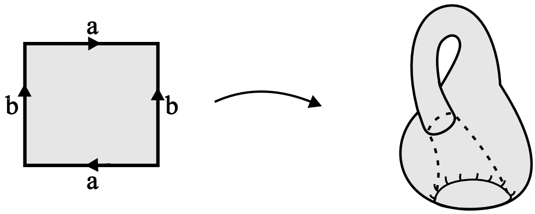
Es claro que este espacio cociente es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^3$, como se muestra en la figura. Sin embargo, nos vamos a quedar en este caso con la idea intuitiva, sin definir analíticamente ese subespacio ni la correspondiente identificación, puesto que al hablar del cono se suele hacer utilizando el espacio cociente.

Ejemplo 4.2.10 Identificando en el cuadrado unidad I^2 cada punto de la forma $(0,t)$ con el $(1, 1-t)$ se obtiene como conjunto cociente un espacio denominado *cinta de Möbius*. Tampoco vamos a dar la expresión analítica de un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a la cinta de Möbius, aunque un dibujo del mismo es el siguiente:



Este espacio, introducido por A.F. Möbius en 1950, tiene propiedades interesantes, como que sólo tiene una cara o que al cortarlo por su ecuador no se divide en dos.

Ejemplo 4.2.11 Por último obtendremos mediante identificaciones en el borde de un cuadrado el espacio denominado *botella de Klein*. Hay que resaltar que es imposible incluir la botella de Klein en un espacio tridimensional, aunque podemos pensar que es algo parecido a la superficie que muestra la siguiente figura, suponiendo que no tiene autointersecciones.



Destacamos aquí cómo un espacio que no se acomoda de ninguna manera a tres dimensiones puede ser sin embargo representado perfectamente en dos, si se usa la herramienta de las identificaciones.

Capítulo 5

Contabilidad y Separación

Aquí se inicia un estudio de ciertas propiedades que pueden verificar los espacios topológicos. La importancia de las mismas radica principalmente en que permiten comparar espacios. En particular, este capítulo trata de las propiedades relativas a contabilidad y separación. En relación a la contabilidad, es preciso estar familiarizado con los conceptos básicos de la teoría de cardinalidad de conjuntos (Apéndice A).

5.1. Axiomas de Contabilidad

En espacios métricos es usual trabajar con bases de entornos de la forma $\beta(x) = \{B(x, \frac{1}{n}) \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. La principal propiedad de las mismas es que están formadas por una sucesión de entornos cada uno de los cuales contiene al siguiente.

En este párrafo nos ocuparemos de aquellos espacios topológicos en los cuales es posible obtener bases de entornos que verifiquen una propiedad similar a la anterior.

Definición 5.1.1 Un espacio topológico (X, T) se dice *primer contable* (o simplemente $C1$) cuando todo punto del espacio admite una base de entornos contable.

Si queremos ser más explícitos, podemos decir que un espacio (X, T)

es $C1$ cuando para todo $x \in X$ existe $\beta(x)$ base de entornos de x con $Card(\beta(x)) \leq \chi_0$.

Obsérvese que aunque en esta definición no se exige los entornos básicos se vayan encajando sucesivamente, como sucede en el ejemplo motivador de los espacios métricos, es posible obtener una base de entornos en la cual esto sí ocurra. Si $\beta(x) = \{U_i \ / \ i \in I\}$ es una base de entornos de un punto x, donde I es el conjunto de los números naturales ó $I = \{1, 2, ..., n\}$, entonces $\beta'(x) = \{U_i' \ / \ i \in I\}$, con $U_i' = U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_i$, es una base de entornos contable de x con $U_1' \supset U_2' \supset ... \supset U_m' \supset ...$.

Ejemplo 5.1.1 Sabemos que $\beta(x) = \{X\}$ es una base de entornos de cualquier punto x en un espacio topológico indiscreto. Así, todo espacio topológico indiscreto es $C1$.

Ejemplo 5.1.2 Dado un punto x de un conjunto X, también sabemos que $\beta(x) = \{\{x\}\}$ es una base de entornos de x en la topología discreta. Por tanto todo espacio topológico discreto es también $C1$.

Ejemplo 5.1.3 Una base de entornos de un punto x de X en la topología de superconjuntos de $Y \subset X$ es $\beta(x) = \{Y \cup \{x\}\}$. Como $Card\ \beta(x) = 1$ se tiene que (X, T^Y) es primer contable.

Ejemplo 5.1.4 Una base de entornos de un punto $x \in X$ en la topología de subconjuntos de $Y \subset X$ es $\beta(x) = \{\{x\}\}$ si $x \in Y$, o bien $\beta(x) = \{X\}$ si $x \notin Y$. Como en ambos casos el cardinal de la base de entornos es 1, se tiene que (X, T_Y) es primer contable.

Ejemplo 5.1.5 Un espacio topológico cofinito (X, T_{cof}) es primer contable si y sólo si X es un conjunto contable.

($\Rightarrow$) Para cada punto $x \in X$ denotemos por $\beta(x)$ una base de entornos contable. Entonces $\displaystyle\bigcap_{V \in \beta(x)} V \overset{(1)}{=} \bigcap_{U \in Ent(x)} U \overset{(2)}{=} \{x\}$, pues:

(1) La inclusión ($\supset$) es inmediata. Para la otra, si $y \in \displaystyle\bigcap_{V \in \beta(x)} V$ entonces para cualquier $U \in Ent(x)$ existe $V \in \beta(x)$ con $V \subset$

U (al ser $\beta(x)$ base de entornos de x) y por tanto $y \in V \subset U$. De donde $y \in \bigcap_{U \in Ent(x)} U$.

(2) Basta observar que evidentemente $x \in \bigcap_{U \in Ent(x)} U$, pero si $y \neq x$ entonces $U = X - \{y\} \in Ent(x)$ y por tanto $y \notin \bigcap_{U \in Ent(x)} U$.

Así, aplicando complementarios en la igualdad que resulta de componer (1) y (2) se tiene que $\bigcup_{V \in \beta(x)} (X - V) = X - \{x\}$. Pero como los entornos en la topología cofinita son abiertos, los conjuntos $X - V$ serán cerrados distintos de X (pues $\emptyset \notin \beta(x)$), y por tanto finitos. Así $X - \{x\}$ es contable, al ser una unión contable de conjuntos finitos, y por tanto X es también contable.

($\Leftarrow$) Sabemos que un subconjunto distinto del total en un espacio topológico cofinito es cerrado si y sólo si es finito. Dicho de otra manera, el conjunto de cerrados en (X, T_{cof}) es $\mathcal{C} = \mathcal{P}_{finitas}(X) \cup \{X\}$. Si X es un conjunto contable entonces $\mathcal{P}_{finitas}(X)$ también es contable (usar la Proposición A.5.9, pues el caso finito es trivial). Como sabemos que hay una correspondencia biunívoca (usando complementarios) entre el conjunto de abiertos y el de cerrados de un espacio topológico, hemos probado que hay un número contable de abiertos. Pero los abiertos que contienen a un punto forman una base de entornos de ese punto, luego se concluye que (X, T_{cof}) es primer contable.

Ejemplo 5.1.6 Todo espacio métrico es $C1$, como ya hemos visto al comienzo de este párrafo al considerar la base de entornos

$$\beta(x) = \{B(x, \frac{1}{n}) \ / \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Ejemplo 5.1.7 Considerando en la recta real la topología de Sorgenfrey se obtiene un espacio primer contable, teniendo en cuenta que una base de entornos para un punto $x \in \mathbb{R}$ es $\beta(x) = \{[x, x + \frac{1}{n}) \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

Utilizando el primer axioma de contabilidad se puede obtener un recíproco para la Proposición 3.4.1.

Proposición 5.1.1 *Sea* (X,T) *es un espacio topológico primer contable. Una aplicación* $f:(X,T)\to(Y,T')$ *es continua en* $x\in X$ *si y sólo si para toda sucesión* $x_n\to x$ *se cumple que* $f(x_n)\to f(x)$*.*

Demostración:

Sólo nos resta demostrar $(\Leftarrow)$, pues la otra implicación siempre es cierta (Proposición 3.4.1).

Probémoslo por el contrarrecíproco, es decir, supongamos que f no es continua en x y hallemos una sucesión tal que $x_n\to x$ pero $f(x_n)\nrightarrow f(x)$. Como X es $C1$, podemos considerar una base de entornos $\beta(x)=\{U_i\ /\ i\in I\}$, donde I es el conjunto de los números naturales o un conjunto del tipo $\{1,2,...,n\}$, verificando que $U_i\supset U_j$ si $i\leq j$.

Como f no es continua en x, existe un entorno V de $f(x)$ tal que para todo $i\in I$ se verifica que $f(U_i)$ no está contenido en V. Podemos considerar una sucesión $\{x_i\}\subset X$ verificando que $x_i\in U_i$ y $f(x_i)\notin V$ (si $I=\{1,2,...,n\}$ se considera $x_i\in U_n$ para $i>n$) y es fácil probar que la sucesión construida converge a x (se deja como ejercicio). Pero como $f(x_i)\notin V$ para ningún i, la imagen por f de esta sucesión no converge a $f(x)$. ∎

Corolario 5.1.1 *Sea* (X,T) *es un espacio topológico primer contable. Una aplicación* $f:(X,T)\to(Y,T')$ *es continua si y sólo si para toda sucesión* $x_n\to x$ *se cumple que* $f(x_n)\to f(x)$*.*

Ejemplo 5.1.8 En los ejemplos 3.4.2 y 3.4.6 vimos que las únicas sucesiones convergentes en espacios topológicos discretos y espacios topológicos cocontables son las estacionarias. Por tanto la identidad $1:(X,T_{cc})\to(X,T_D)$ conserva la convergencia de sucesiones. Pero esta identidad no es una aplicación continua, luego del Corolario 5.1.1 anterior se deduce que (X,T_{cc}) no puede ser $C1$.

En espacios que verifican el primer axioma de contabilidad es posible caracterizar la adherencia de un subconjunto utilizando convergencia. Como consecuencia, también es posible caracterizar los subconjuntos abiertos y los cerrados.

Proposición 5.1.2 *Si* (X, T) *es primer contable y* $A \subset X$ *entonces* $x \in Cl(A)$ *si y sólo si existe una sucesión en* A *convergente a* x.

Demostración:

($\Rightarrow$) Al ser el espacio $C1$, para todo $x \in X$ podemos considerar una base contable de entornos encajados $\beta(x) = \{U_i \ / \ i \in I\}$, donde $I = \mathbb{N}$ ó $I = \{1, 2, ..., n\}$. Si $x \in Cl(A)$ entonces para todo $i \in I$ se verifica que $U_i \cap A \neq \emptyset$. Luego podemos considerar una sucesión tal que $x_i \in U_i \cap A$ (si $I = \{1, 2, ..., n\}$ se considera $x_i \in U_n \cap A$, para $i \geq n$), y se concluye el resultado, pues es fácil probar que la sucesión construida converge a x.

($\Leftarrow$) Sea $\{x_n\} \subset A$ con $x_n \to x$. Entonces, para todo entorno U de x existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U \cap A$ si $n \geq n_0$. Por tanto $U \cap A \neq \emptyset$ y se concluye que $x \in Cl(A)$.

■

Nótese que la implicación ($\Leftarrow$) es siempre cierta, aunque el espacio no sea primer contable. Por otro lado, si en la Proposición 5.1.2 se impone que los términos de la sucesión sean distintos de x entonces se puede sustituir la clausura de A por su derivado.

Corolario 5.1.2 *Sea* (X, T) *es un espacio primer contable.*

a) *Un subconjunto* A *de* X *es abierto si y sólo si para todo* $x \in A$ *y toda sucesión* $\{x_n\} \subset X$ *convergente a* x *se verifica que* $\{x_n\}$ *está eventualmente en* A *(es decir, la sucesión está en* A *desde un cierto término en adelante).*

b) *Un subconjunto* F *de* X *es cerrado si y sólo si para toda sucesión* $\{x_n\} \subset F$ *convergente a* x *se verifica que* $x \in F$.

Demostración:

(a) ($\Rightarrow$) Al ser A abierto existe $U \in Ent(x)$ con $x \in U \subset A$, y como $x_n \to x$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $x_n \in U \subset A$ para todo $n \geq n_0$.

($\Leftarrow$) Veamos que $Cl(X-A) = X-A$. Si $x \in Cl(X-A)$ entonces, por la Proposición 5.1.2, existe $\{x_n\} \subset X-A$ con $x_n \to x$. En consecuencia $x \in X-A$, pues en caso contrario $\{x_n\}$ estaría eventualmente en A, lo cual es imposible.

(b) ($\Rightarrow$) Como $\{x_n\}$ es una sucesión en F convergente a x, por ser F cerrado y por la Proposición 5.1.2 se tiene que $x \in Cl(F) = F$.

($\Leftarrow$) Veamos que $Cl(F) \subset F$. Si $x \in Cl(F)$ entonces, por la Proposición 5.1.2 existe una sucesión $\{x_n\} \subset F$ con $x_n \to x$, y por hipótesis $x \in F$.

■

Los siguientes resultados aseguran que la propiedad "ser $C1$" funciona bien con respecto a subespacios, homeomorfismos y productos.

Proposición 5.1.3 *Ser primer contable es una propiedad hereditaria y topológica. Además, un espacio producto $X \times Y$ es primer contable si y sólo si X e Y lo son.*

Demostración:

Si (X,T) es primer contable entonces para todo $x \in X$ existe una base de entornos contable $\beta(x)$. Para probar que todo subespacio es también $C1$ basta observar, para $A \subset X$ y $x \in A$, que $\beta_A(x) = \{U \cap A \ / \ U \in \beta(x)\}$ es una base de entornos contable de x en T_A (Proposición 2.4.2) . Además, si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo entonces para todo $y \in Y$ se tiene que $\beta_f(y) = \{f(U) \ / \ U \in \beta(f^{-1}(y))\}$ es una base de entornos contable de y (apartado (b) de la Proposición 3.3.3).

Respecto al producto de espacios:

($\Rightarrow$) Dado un punto $x \in X$, se considera un punto cualquiera $y \in Y$. Como $(x,y) \in X \times Y$ y el espacio producto es primer contable, existe una base de entornos contable $\{U_i\}_{i \in I}$ de (x,y). Entonces, el apartado (a) de la Proposición 4.1.8 asegura que $\{p_X(U_i)\}_{i \in I}$ es una base de entornos contable de x. Análogamente para Y.

($\Leftarrow$) Es consecuencia del Corolario A.5.1 y del apartado (b) de la Proposición 4.1.8. ■

Una propiedad más fuerte que el primer axioma de contabilidad se puede obtener estudiando el cardinal de las bases de abiertos.

Definición 5.1.2 Un espacio topológico (X, T) se dirá *segundo contable* (o simplemente $C2$) cuando T admita una base contable.

Para expresar la anterior definición de una manera más explícita, podemos decir que un espacio es $C2$ cuando existe una base de abiertos $\mathcal{B}$ verificando que $card\, \mathcal{B} \leq \chi_0$.

Ejemplo 5.1.9 Como $\mathcal{B} = \{X\}$ es una base de la topología indiscreta sobre un conjunto X, se tiene que (X, T_I) es siempre segundo contable.

Ejemplo 5.1.10 Por otro lado, como $\mathcal{B} = \{\{x\} \ / x \in X\}$ es una base minimal de la topología discreta sobre un conjunto X, se tiene que (X, T_D) es $C2$ si y sólo si X es un conjunto contable.

Ejemplo 5.1.11 También sabemos que, para un conjunto no vacío ni unitario X, fijado $Y \subset X$, una base minimal de la topología de superconjuntos de Y es $\mathcal{B} = \{Y\} \cup \{Y \cup \{x\} \ / \ x \in X - Y\}$. Luego (X, T^Y) es $C2$ si y sólo si $X - Y$ es contable.

Ejemplo 5.1.12 Si sobre X se considera la topología de subconjuntos de Y entonces $\mathcal{B} = \{X\} \cup \{\{x\} \ / \ x \in Y\}$ es una base minimal de T_Y. Luego (X, T_Y) es $C2$ si y sólo si Y es contable.

Ejemplo 5.1.13 Todo espacio métrico contable es segundo contable. Teniendo en cuenta que el producto finito de conjuntos contables es contable, basta tomar como base de la topología $\mathcal{B} = \{B(x, q) \ / \ x \in X \wedge q \in \mathbb{Q}\}$.

Ejemplo 5.1.14 Aunque el conjunto de los números reales no es contable, sí se verifica que $(\mathbb{R}, T_u)$ es $C2$. Basta observar que el subconjunto $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \ / \ x, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es base de la topología usual.

Ejemplo 5.1.15 La recta real con la topología de Sorgenfrey no es un espacio $C2$.

Consideremos una base $\mathcal{B}$ de la topología de Sorgenfrey. Como todos los subconjuntos de la forma $[x, x+\varepsilon)$ $(x, \varepsilon \in \mathbb{R})$ son abiertos, ocurrirá que $[x, x+\varepsilon)$ es unión de abiertos básicos uno de los cuales, que llamaremos B_x, contiene a x. Pero entonces $[x, \delta) \subset B_x \subset [x, \infty)$, para algún $\delta \leq \varepsilon$. Como $B_x \in \mathcal{B}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y dados $x \neq y$ se verifica que $B_x \neq B_y$, se concluye que $\mathcal{B}$ no es contable.

Los axiomas de contabilidad se relacionan entre sí:

Proposición 5.1.4 *Si un espacio topológico* (X, T) *es segundo contable entonces es también primer contable.*

Demostración:

Basta aplicar el apartado (a) de la Proposición 1.4.2, pues si $\mathcal{B}$ es una base contable de T y $x \in X$ entonces $\beta(x) = \{B \in \mathcal{B} \ / \ x \in B\}$ es una base de entornos contable de x. ■

Si bien el recíproco de esta Proposición 5.1.4 no es cierto en general (pensar en un espacio no contable con la topología discreta), sí se verifica bajo ciertas condiciones.

Proposición 5.1.5 *Si un espacio topológico* (X, T) *es contable y primer contable entonces también es segundo contable.*

Demostración:

Por la proposición 1.5.4, dada una base de entornos $\beta(x)$ se tiene que $\beta'(x) = \{Int(U) \ / \ U \in \beta(x)\}$ es una base de entornos abiertos de x. Utilizando ahora el apartado (b) de la Proposición 1.4.2 y el hecho de que el producto finito de conjuntos contables es contable, si se tiene para todo $x \in X$ una base de entornos abiertos contable $\beta(x)$ entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \beta'(x)$ es una base contable de T. ■

Ejemplo 5.1.16 Un espacio cofinito (X, T_{cof}) es $C2$ si y sólo si X es contable.

Si X es contable entonces, por el Ejemplo 5.1.5, se tiene que (X, T_{cof}) es $C1$, y por la Proposición 5.1.5 se concluye que (X, T_{cof}) es $C2$.

Sin embargo, si X no es contable entonces, de nuevo por el Ejemplo 5.1.5, se tiene que (X, T_{cof}) no es $C1$, y por el contrarrecíproco de la Proposición 5.1.4 se concluye que (X, T_{cof}) no es $C2$.

También el segundo axioma de contabilidad tiene buenas propiedades respecto a subespacios, homeomorfismos y producto.

Proposición 5.1.6 *Ser segundo contable es una propiedad hereditaria y topológica. Además, un espacio producto $X \times Y$ es segundo contable si y sólo si X e Y lo son.*

Demostración:

Si (X, T) es $C2$, existe una base de abiertos contable $\mathcal{B}$. Si $A \subset X$ entonces $\mathcal{B}_A = \{B \cap A \ / \ B \in \mathcal{B}\}$ es una base contable de T_A (Proposición 2.2.1). Además, dado un homeomorfismo $f : X \to Y$, entonces $\mathcal{B}_f = \{f(B) \ / \ B \in \mathcal{B}\}$ es una base de abiertos contable del espacio de llegada (apartado (a) de la Proposición 3.3.3).

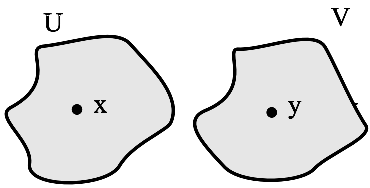
Lo referente a espacios producto es una consecuencia inmediata de la Proposición 4.1.6. ■

5.2. Axiomas de Separación

En 1914 el matemático F. Hausdorff dio una definición de topología en la cual, además de las tres propiedades ya conocidas, exigía que todo par de puntos distintos pudieran separarse adecuadamente. Aunque el concepto de espacio topológico actualmente aceptado no requiere dicha propiedad, ésta sigue manteniendo su importancia pues los espacios más usuales la verifican.

Definición 5.2.1 Un espacio topológico se dice *de Hausdorff* (o simplemente T_2) cuando todo par de puntos distintos tiene entornos disjuntos.

Dicho más detalladamente, un espacio (X, T) es de Hausdorff si para todos $x, y \in X$ $(x \neq y)$ existen $U \in Ent(x)$ y $V \in Ent(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.



Es fácil comprobar que la anterior definición es equivalente a la que resulta de sustituir los entornos por entornos básicos.

Ejemplo 5.2.1 En el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ consideramos la topología

$$T = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{4\}, \{1,4\}, \{1,2,4\}\}$$

Este espacio no es T_2 pues, por ejemplo, $\beta(1) = \{\{1\}\}$ y $\beta(2) = \{\{1,2\}\}$ son bases de entornos, y sus elementos tienen intersección no vacía.

Ejemplo 5.2.2 Como en un espacio indiscreto el único entorno de cualquier punto es el conjunto total, se concluye que este tipo de espacios no es T_2.

Ejemplo 5.2.3 Sin embargo, todo espacio topológico discreto es de Hausdorff, pues para $x \neq y$ existen los entornos disjuntos $\{x\}$ e $\{y\}$.

Ejemplo 5.2.4 En la topología de superconjuntos de $Y \subset X$, todo entorno de un punto contiene a Y, luego no existen entornos disjuntos para ninguna pareja de puntos distintos. Por tanto (X, T^Y) no es T_2.

Ejemplo 5.2.5 Considerando ahora la topología de subconjuntos de $Y \subsetneq X$, como el único entorno de un punto $x \in X - Y$ es X, no es cierto que todo par de puntos tengan entornos distintos (basta tomar $x \in X - Y$, $y \in X$). En consecuencia (X, T_Y) tampoco es de Hausdorff.

Ejemplo 5.2.6 Un espacio topológico cofinito (X, T_{cof}), con X conjunto infinito, tampoco es T_2.

Si $x \neq y$, $U \in Ent(x)$ y $V \in Ent(y)$, como los entornos en T_{cof} son abiertos ocurrirá que $U = X - \{x_1, ..., x_n\}$ y $V = X - \{y_1, ..., y_m\}$. Si $U \cap V = \emptyset$ entonces $X = X - (U \cap V) = (X - U) \cup (X - V) = \{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m\}$, lo cual es imposible al ser X un conjunto infinito.

Ejemplo 5.2.7 Todo espacio métrico es de Hausdorff. Basta comprobar que dados $x \neq y$ se verifica que $B(x, \frac{d(x,y)}{2}) \cap B(y, \frac{d(x,y)}{2}) = \emptyset$.

Ejemplo 5.2.8 La recta real con la topología de Sorgenfrey es también T_2. Dos puntos distintos $x < y$ tienen entornos disjuntos, por ejemplo $[x, \frac{x+y}{2})$ e $[y, \infty)$.

Una interesante caracterización se obtiene utilizando el producto de espacios.

Proposición 5.2.1 *Un espacio topológico* (X, T) *es* T_2 *si y sólo si la diagonal*

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$$

es un cerrado de la topología producto.

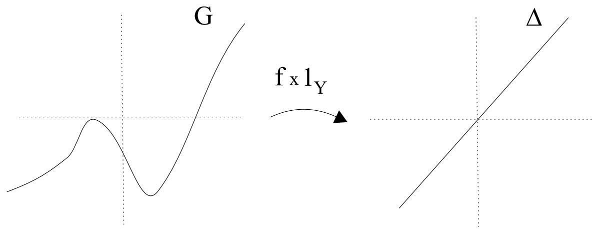
Demostración:

($\Rightarrow$) Comprobemos que el complementario de la diagonal es un abierto. Si $(x, y) \in (X \times X) - \Delta$ entonces $x \neq y$. Al ser X un espacio Hausdorff existen entornos disjuntos U y V de x e y, respectivamente. Por el apartado (b) de la Proposición 4.1.7, $U \times V$ es un entorno de (x, y) en la topología producto, y como además $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ se concluye que $(x, y) \in Int((X \times X) - \Delta)$.

($\Leftarrow$) Si x, y son dos puntos distintos de X entonces $(x, y) \in (X \times X) - \Delta$. Considerando $Ent(x) * Ent(y)$ como base de entornos de (x, y) en la topología producto (ver apartado (b) de la Proposición 4.1.8), como $(X \times X) - \Delta$ es un abierto existirán $U \in Ent(x)$, $V \in Ent(y)$ con $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. En consecuencia $U \cap V = \emptyset$.

■

Ejemplo 5.2.9 Dada una aplicación continua $f : X \to Y$, si Y es T_2 entonces el *grafo* $G = \{(x, f(x)) \ / \ x \in X\} \subset X \times Y$ de la aplicación f es un subconjunto cerrado del espacio producto. Para probarlo basta observar que el producto de f por la identidad en Y es continua (Corolario 4.1.1) y que $(f \times 1_Y)^{-1}(\Delta) = G$.



Una vez hemos introducido los espacios de Haudorff, veamos una de las principales propiedades que dan sentido a este concepto.

Proposición 5.2.2 *Toda sucesión convergente en un espacio topológico de Hausdorff tiene un único límite.*

Demostración:

Sea (X, T) un espacio T_2 y sea $\{x_n\}$ una sucesión en X con límite x. Si $y \neq x$, existen $U \in Ent(x)$ y $V \in Ent(y)$ con $U \cap V = \emptyset$. Como $x_n \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto, $x_n \notin V$ para $n \geq n_0$, y se concluye que $x_n \not\to y$. ■

En espacios que no son de Hausdorff, como la Proposición 5.2.2 anterior no tiene por qué verificarse, ocurren cosas de lo más extrañas. Como se vio en el Ejemplo 3.4.2, en un espacio topológico indiscreto toda sucesión converge a cualquier punto del espacio. Otro caso interesante es el siguiente.

Ejemplo 5.2.10 Tomando el espacio del ejemplo 5.2.1, esto es, $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $T = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$, ocurre que:

- La sucesión $1, 2, 1, 2, 1, ...$ converge a 2 y a 3, pero sin embargo no converge a 1.

- La sucesión constante en 1 converge a 1, 2 y 3.

La propiedad "ser de Hauddorff" se conserva por homeomorfismos. Además, los subespacios y productos de espacios de Hausdorff también lo son.

Proposición 5.2.3 *Ser T_2 es una propiedad topológica y hereditaria. Además, un espacio producto $X \times Y$ es de Hausdorff si y sólo si X e Y lo son.*

Demostración:

Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, X es T_2 y $x, y \in Y$, basta considerar la imagen por f de dos entornos disjuntos de $f^{-1}(x)$ y $f^{-1}(y)$ para obtener entornos disjuntos de x e y. Por otro lado, si (X, T) es un espacio topológico y $x, y \in Y \subset X$, basta tomar como entornos en T_Y la intersección de Y con los entornos que garantizan la propiedad en T. En cuanto al espacio producto:

($\Rightarrow$) Dados dos puntos distintos x, x' de X, fijando un punto arbitrario y_0 de Y se tienen dos puntos distintos $(x, y_0), (x', y_0)$ de $X \times Y$. Por hipótesis, existen entornos básicos disjuntos $U \times V$ y $U' \times V'$ de (x, y_0) e (x', y_0), respectivamente. Entonces $U = p_X(U \times V)$ es un entorno de x, $U' = p_X(U' \times V')$ es un entorno de x' y $U \cap U' = \emptyset$, pues si $z \in U \cap U'$ entonces $(z, y_0) \in (U \times V) \cap (U' \times V')$.

Análogamente para Y.

($\Leftarrow$) Si $(x, y), (x', y')$ son dos puntos distintos de $X \times Y$ entonces $x \neq x'$ ó $y \neq y'$. Si suponemos (sin perder generalidad) que $x \neq x'$, existen $U \in Ent(x), U' \in Ent(x')$ con $U \cap U' = \emptyset$. Entonces $U \times Y \in Ent((x, y))$, $U' \times Y \in Ent((x', y'))$ y claramente $(U \times Y) \cap (U' \times Y) = \emptyset$. ∎

Los subconjuntos unitarios en espacios de Hausdorff son cerrados, cosa que no tiene por qué ocurrir en general (pensar, por ejemplo, en la topología indiscreta).

Proposición 5.2.4 *Todos los subconjuntos unitarios de un espacio topológico de Hausdorff son cerrados.*

Demostración:

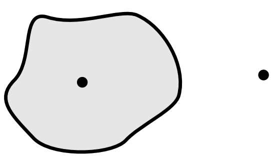
Sea (X, T) un espacio topológico T_2 y $x \in X$. Si $y \in X - \{x\}$ entonces $x \neq y$, y existen, por ser el espacio de Hausdorff, $U \in Ent(x)$ y $V \in Ent(y)$ con $U \cap V = \emptyset$. Por tanto $x \notin V$, luego $V \subset X - \{x\}$ y se ha demostrado que $X - \{x\}$ es abierto. ■

Hay otras formas diferentes de separar puntos en un espacio topológico. En las siguientes definiciones no se exige la existencia de entornos disjuntos, sino unas condiciones más débiles.

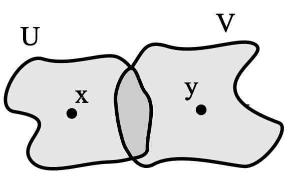
Definición 5.2.2 Un espacio topológico (X, T) se dirá T_0 cuando, para todo par de puntos, existe un entorno de uno de ellos que no contiene al otro. Se dirá que (X, T) es T_1 cuando, para todo par de puntos, existe un entorno de cada uno de ellos que no contiene al otro.

Si queremos expresar las anteriores definiciones explícitamente, podemos poner:

(X, T) es T_0 si y sólo si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existe $U \in Ent(x)$ con $y \notin U$ ó existe $V \in Ent(y)$ con $x \notin V$.



(X, T) es T_1 si y sólo si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existe $U \in Ent(x)$ con $y \notin U$ y existe $V \in Ent(y)$ con $x \notin V$.



También en estas definiciones es posible sustituir entornos por entornos básicos sin que varíe el concepto introducido.

Como hemos dicho, las condiciones exigidas para ser T_0 ó T_1 son más débiles que la que caracteriza a los espacios de Hausdorff. Por tanto es fácil probar (y se deja como ejercicio) lo siguiente:

Proposición 5.2.5 *Todo espacio de Hausdorff es T_1. Además, todo espacio T_1 es T_0.*

Como consecuencia de esta Proposición 5.2.5 se deduce que todos los espacios de Hausdorff son también ejemplos de espacios T_1 y T_0, en particular los espacios métricos. Pero los tres conceptos no son equivalentes.

Ejemplo 5.2.11 Todo espacio cofinito es T_1 pero no de Hausdorff.

Ejemplo 5.2.12 Considerando en un conjunto X no vacío ni unitario la topología de superconjuntos de un subconjunto unitario $\{x\}$, el espacio que resulta es T_0 pero no T_1.

Ejemplo 5.2.13 Los espacios indiscretos no son T_0.

No sólo es cierto que en espacios T_1 todos los subconjuntos unitarios son cerrados, como ocurría para espacios de Hausdorff (ver Proposición 5.2.4) sino que además esta propiedad caracteriza a los espacios T_1.

Proposición 5.2.6 *Un espacio topológico es T_1 si y sólo si todos los subconjuntos unitarios son cerrados.*

Demostración:

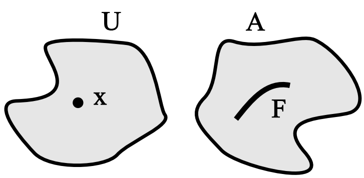
($\Rightarrow$) Sea (X, T) un espacio topológico T_1, y $x \in X$. Comprobaremos que $\{x\}$ es cerrado viendo que $X-\{x\}$ es abierto. Para todo $y \in X-\{x\}$ existe, por ser el espacio T_1, un entorno U de y tal que $x \notin U$. Por tanto $U \subset X - \{x\}$.

($\Leftarrow$) Sean $x, y \in X$. Como por hipótesis $\{x\}$ e $\{y\}$ son conjuntos cerrados, se tiene que $X - \{x\}$ y $X - \{y\}$ son abiertos. Como además $y \in X - \{x\}$, $x \notin X - \{x\}$, $x \in X - \{y\}$ e $y \notin X - \{y\}$, se concluye el resultado. ■

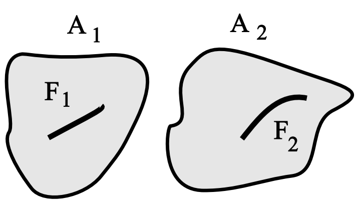
Cabe señalar que las propiedades "ser T_0" y "ser T_1" son topológicas, hereditarias y el producto de dos espacios $X \times Y$ es T_i si y sólo si lo son X e Y. Para probarlo basta tomar como referencia lo hecho en el caso de espacios de Hausdorff.

Si en un espacio consideramos propiedades similares a la de Hausdorff, pero considerando subconjuntos cerrados en lugar de puntos, se obtienen nuevos conceptos de separación en espacios topológicos.

Definición 5.2.3 Un espacio topológico (X, T) se dirá *regular* cuando, para todo subconjunto cerrado $F \subset X$ y todo punto $x \in X - F$, existe un entorno U de x y un abierto A conteniendo a F disjuntos.



(X, T) se dirá *normal* cuando, para todo par de subconjuntos cerrados disjuntos $F_1, F_2 \subset X$, existen dos abiertos disjuntos A_1 y A_2 conteniendo a F_1 y F_2, respectivamente.



También en estas definiciones es posible tomar simplemente abiertos y entornos básicos.

A continuación se presenta una propiedad que caracteriza a los espacios regulares, y que será de utilidad más adelante.

Proposición 5.2.7 *Un espacio topológico es regular si y sólo si el conjunto de entornos cerrados de cualquier punto de X es una base de entornos de ese punto.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $V \in Ent(x)$, debemos hallar un entorno cerrado de x contenido en V. Como $X - Int(V)$ es un cerrado con $x \notin X - Int(V)$, por hipótesis existirán $U \in Ent(x)$ y $A \in T$ verificando $X - Int(V) \subset A$ y $U \cap A = \emptyset$. En consecuencia $X - A \subset Int(V)$ y $x \in U \subset X - A$. Así, $X - A$ es un entorno cerrado de x contenido en V.

($\Leftarrow$) Sea F un cerrado en X y $x \notin F$. Como $X - F$ es un abierto conteniendo a x ocurre que $X - F \in Ent(x)$. Por hipótesis existirá un entorno cerrado U de x con $U \subset X - F$. Considerando $A = X - U \in T$ se tiene que $F \subset A$ y $A \cap U = \emptyset$, que es lo que se pretendía obtener.

■

Las propiedades que caracterizan a los espacios regulares y normales no son, aunque lo pudiera parecer a primera vista, estrictamente más fuertes que la de Hausdorff, ni tampoco ser normal implica ser regular. Para que esto ocurra es necesario exigir a los espacios que sean T_1. Es por ello que se suele llamar *espacio* T_3 a aquél que es T_1 y regular, y *espacio* T_4 al que es T_1 y normal. Con esta nomenclatura y usando que los puntos en espacios T_1 son cerrados (Proposición 5.2.6) sí que es fácil probar lo siguiente.

Proposición 5.2.8 *Todo espacio topológico T_4 es T_3. Además todo espacio T_3 es de Hausdorff.*

No nos podemos resistir a combinar la proposiciones 5.2.5 y 5.2.8 para obtener la siguiente expresión:

Corolario 5.2.1

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Ejemplo 5.2.14 Todo espacio métrico es regular y normal.

Como sabemos que todo espacio métrico es T_1, por la Proposición 5.2.8 bastará probar que es normal para tener el resultado.

Sean F_1, F_2 cerrados disjuntos. Entonces, por el apartado (m) de la Proposición 1.5.2, se tiene que $d(x, F_2) > 0$ para todo $x \in F_1$ y $d(x, F_1) > 0$ para todo $x \in F_2$. Consideremos $A_1 = \{x \in X \ / \ d(x, F_1) < d(x, F_2)\}$ y $A_2 = \{x \in X \ / \ d(x, F_2) < d(x, F_1)\}$.

Obviamente $F_1 \subset A_1$, $F_2 \subset A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Probemos que A_1 es abierto (Para A_2 se procedería análogamente) .

Si $x \in A_1$ entonces $0 < \delta = d(x, F_2) - d(x, F_1)$, y $B(x, \frac{\delta}{2}) \subset A_1$. En efecto, si $y \in B(x, \frac{\delta}{2})$ entonces $2d(x, y) < \delta = d(x, F_2) - d(x, F_1)$. De donde $d(y, F_2) \geq d(x, F_2) - d(x, y) > d(x, F_1) + d(x, y) \geq d(y, F_1)$, el primer y último paso por la Proposición B.1. Y se concluye que $y \in A_1$.

Ser normal y regular son propiedades que se conservan por homeomorfismos, como se puede probar sin dificultad. Además "ser regular" también se comporta bien con respecto a subespacios y productos.

Proposición 5.2.9 *Ser regular y ser normal son propiedades topológicas. Ser regular es una propiedad hereditaria. Además $X \times Y$ es regular si y sólo si X e Y lo son.*

Demostración:

Lo referente a propiedad topológica se deja como ejercicio.

Sea (X, T) espacio regular e $Y \subset X$. Dados $x \in Y$ y $F \in \mathcal{C}_Y$ con $x \notin F$ entonces $x \notin Cl_Y(F) = F$. Como $Cl_Y(F) = Cl(F) \cap Y$, entonces $x \notin Cl(F)$. Al ser (X, T) regular, existen $U \in Ent(x)$ y $A \in T$ verificando que $Cl(F) \subset A$ y $U \cap A = \emptyset$. En consecuencia, existen $U \cap Y \in Ent_Y(x)$ y $A \cap Y \in T_Y$ verificando que $Cl(F) \cap Y = Cl_Y(F) = F \subset A$ y $(U \cap Y) \cap (A \cap Y) = U \cap A \cap Y = \emptyset$.

En cuanto al producto:

($\Rightarrow$) Sea $x \in X$ y F cerrado en X con $x \notin F$. Si $y_0 \in Y$ entonces $(x, y_0) \in X \times Y$ y $F \times Y$ es un cerrado en $X \times Y$ (Proposición 4.1.2) verificando $(x, y_0) \notin F \times Y$. Considerando la base de abiertos $\mathcal{B}$ de la topología producto formada por los productos de abiertos, y la base de entornos $\beta((x, y_0))$ cuyos elementos son los abiertos de $\mathcal{B}$ que contienen a (x, y_0), por hipótesis existirán $U \times V \in \beta((x, y_0))$ y

$A \times A'$ in $\mathcal{B}$ verificando que $F \times Y \subset A \times A'$ y $(U \times V) \cap (A \times A') = \emptyset$ (obsérvese que como $F \times Y \subset A \times A'$ entonces $A' = Y$). Así $U \in Ent(x)$, $A \in T$, $F \subset A$ y $U \cap A = \emptyset$, como se pretendía.

Para Y es similar.

($\Leftarrow$) Si X e Y son regulares entonces, por la Proposición 5.2.7, para todos $x \in X, y \in Y$ se tiene que $\beta(x) = \{U \in Ent(x) \ / \ U \ es \ cerrado\}$ y $\beta(y) = \{V \in Ent(y) \ / \ V \ es \ cerrado\}$ son bases de entornos en las respectivas topologías. Aplicando ahora el apartado (b) de la Proposición 4.1.8 se deduce que $\beta(x) * \beta(y)$ es una base de entornos en la topología producto, y como por la Proposición 4.1.2 se tiene que $\beta(x) * \beta(y) \subset \{W \in Ent((x, y)) \ / \ W \ es \ cerrado\}$, se deduce que el conjunto de entornos cerrados de (x, y) es base de entornos de (x, y) en $X \times Y$. Aplicando de nuevo la Proposición 5.2.7 se tiene el resultado.

■

Sin embargo la normalidad no tiene tan buenas propiedades. En cuanto a subespacios y productos sólo podemos afirmar lo siguiente.

Proposición 5.2.10 *Los subconjuntos cerrados de un espacio topológico normal son espacios normales, con la topología inducida. Además, si $X \times Y$ es un espacio normal entonces X e Y lo son.*

Demostración:

Se deja como ejercicio. ■

Ejemplo 5.2.15 Ser normal no es una propiedad hereditaria. Consideremos $X = \{a, b, c, d\}$, $T = \{\emptyset, X, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{d\}\}$ y $A = \{a, b, d\}$. Como en (X, T) no hay cerrados no vacíos que sean disjuntos, es normal. Sin embargo, los cerrados $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{C}_A$ contradicen la normalidad de (A, T_A).

Ejemplo 5.2.16 La recta real con la topología de Sorgenfrey es normal, pero el producto de este espacio por sí mismo no lo es. Probar este hecho requiere herramientas que no tenemos, así que dejamos la demostración para quien quiera profundizar en el tema. Obsérvese que como consecuencia de esto, al ser normales los espacios métricos (Ejemplo 5.2.14), y teniendo en cuenta que el producto de espacios métricos es un espacio métrico, se deduce que la topología de Sorgenfrey no está inducida por ninguna métrica.

Capítulo 6

Conexidad

En un lenguaje coloquial, la palabra conexo significa "de una sola pieza" o "que no se puede separar", y esta es la propiedad que se pretende introducir para los espacios topológicos. Sin embargo, no hay una única formalización de este concepto. Aquí se darán dos definiciones que representan la idea intuitiva de conexidad de diferente manera.

6.1. Espacios conexos

La definición de conexidad actualmente aceptada, introducida por S. Mazurkiewicz en el año 1920, es la siguiente.

Definición 6.1.1 Un espacio topológico (X, T) se dirá *conexo* cuando los únicos subconjuntos abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el total.

Ejemplo 6.1.1 Sea $X = \{a, b, c\}$ con la topología $T = \{X, \emptyset, \{a\}\}$. Como $\mathcal{C} = \{\emptyset, X, \{b, c\}\}$ se tiene que $T \cap \mathcal{C} = \{\emptyset, X\}$, y por tanto (X, T) es conexo.

Ejemplo 6.1.2 Si consideramos ahora en $X = \{a, b, c\}$ la topología $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$, el conjunto de cerrados que resulta es $\mathcal{C} = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a\}\} = T$. Por tanto (X, T) no es conexo.

Ejemplo 6.1.3 Todo espacio topológico indiscreto es conexo.

Ejemplo 6.1.4 Si un conjunto tiene más de un elemento entonces no es conexo con la topología discreta.

Ejemplo 6.1.5 Considérese $Y \subset X$ con $\emptyset \neq Y \neq X$.

Como los cerrados en la topología de superconjuntos de Y son

$$\mathcal{C}^Y = \{F \subset X \;/\; Y \subset X - F\} \cup \{X - \emptyset\} = \{F \subset X \;/\; Y \cap F = \emptyset\} \cup \{X\}$$

un abierto y cerrado Z distinto del vacío y el total verificaría que $Y \subset Z$ e $Y \cap Z = \emptyset$, lo cual es imposible. Luego (X, T^Y) es conexo.

Por otro lado, los cerrados en la topología de subconjuntos de Y son

$$\mathcal{C}_Y = \{F \subset X \;/\; X - F \subset Y\} \cup \{X - X\} = \{F \subset X \;/\; X - Y \subset F\} \cup \{\emptyset\}$$

y se tiene que un abierto y cerrado Z distinto del vacío y el total verificaría que $X - Y \subset Z \subset Y$, lo cual es también imposible. Por tanto (X, T_Y) es conexo.

Ejemplo 6.1.6 Todo espacio cofinito sobre un conjunto infinito es conexo. Basta observar que los cerrados distintos del vacío y el total son conjuntos finitos, y que los abiertos distintos del vacío y el total tienen complementario finito y por tanto son conjuntos infinitos.

Un razonamiento similar al anterior, sustituyendo las palabras "finito" e "infinito" por "contable" y "no contable", respectivamente, permite asegurar que si sobre un conjunto no contable se establece la topología cocontable también resulta un espacio conexo.

Ejemplo 6.1.7 $(\mathbb{R}, T_u)$ es conexo. Como en cualquier espacio topológico se verifica que A es abierto y cerrado si y sólo si $Fr(A) = \emptyset$ (Apartado (g) de la Proposición 1.5.2), para comprobar la conexidad bastará demostrar que todo subconjunto A de $\mathbb{R}$ distinto del vacío y el total tiene frontera no vacía.

Como $A \neq \emptyset$ podemos elegir $x_0 \in A$, y como $A \neq \mathbb{R}$ podemos también elegir $y_0 \notin A$. Evidentemente $x_0 \neq y_0$, y podemos suponer que $x_0 < y_0$

(en caso de que $y_0 < x_0$ se procedería análogamente). Como $[x_0, y_0) \cap A$ es no vacío y está acotado, existe su supremo, que llamaremos z_0. Entonces $z_0 \in Fr(A)$, como puede comprobarse fácilmente usando su condición de supremo.

Ejemplo 6.1.8 Con la topología de Sorgenfrey, $\mathbb{R}$ no es conexo. Basta observar que los subconjuntos del tipo $(-\infty, a)$ son abiertos y cerrados.

Hay distintas propiedades que caracterizan a los espacios conexos.

Proposición 6.1.1 *Dado un espacio topológico (X, T), las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) (X, T) *es conexo.*

b) No existen dos abiertos disjuntos y no vacíos cuya unión sea el total.

c) No existen dos cerrados disjuntos y no vacíos cuya unión sea el total.

"$(a) \Rightarrow (b)$" Si existiesen dos abiertos A_1 y A_2 no vacíos, disjuntos y verificando que $A_1 \cup A_2 = X$, entonces $A_2 = X - A_1$ sería un subconjunto abierto y cerrado de X distinto del vacío y el total. Pero esto contradice la hipótesis.

"$(b) \Rightarrow (c)$" Si existiesen dos cerrados F_1 y F_2 no vacíos, disjuntos y verificando que $F_1 \cup F_2 = X$, entonces $X - F_1$ y $X - F_2$ serían dos abiertos contradiciendo la hipótesis.

"$(c) \Rightarrow (a)$" Si existiese un subconjunto A abierto y cerrado con $\emptyset \neq A \neq X$ entonces A y $X - A$ serían dos cerrados contradiciendo la hipótesis.

$\blacksquare$

Ejemplo 6.1.9 El conjunto $X = [1, 2) \cup (3, 5]$ con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$ no es conexo, pues $A_1 = [1, 2) = (0, 2) \cap X$ y $A_2 = (3, 5] = (3, 6) \cap X$ son abiertos no vacíos en esta topología inducida verificando $X = A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

El Ejemplo 6.1.9 anterior nos muestra que aunque $(\mathbb{R}, T_u)$ es conexo su subespacio $[1,2) \cup (3,5]$ no lo es. Por tanto, la conexidad no es una propiedad hereditaria. Sin embargo, sí que es una propiedad topológica. La demostración de este hecho es consecuencia directa del siguiente resultado.

Proposición 6.1.2 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y sobre. Si X es conexo entonces Y es conexo.*

Demostración:

Si existiese un abierto y cerrado $A \subset Y$ distinto del vacío y el total entonces $f^{-1}(A) \subset X$ sería un abierto y cerrado (al ser f continua) distinto del vacío y el total (al ser f sobre), lo cual contradiría la conexidad de X. ■

Corolario 6.1.1 *La conexidad es una propiedad topológica.*

Otra consecuencia de la Proposición 6.1.2 está relacionada con las identificaciones.

Corolario 6.1.2 *Si $f : X \to Y$ es una identificación y el espacio X es conexo entonces Y también lo es. En particular, si X es un espacio conexo y R es una relación de equivalencia sobre X entonces el espacio cociente X/R es conexo.*

A continuación introduciremos la noción de conexidad para subconjuntos de un espacio topológico.

Definición 6.1.2 Un *subconjunto* de un espacio topológico se dirá *conexo* si lo es con la topología inducida.

A partir de ahora y para simplificar notación diremos simplemente que $Y \subset X$ es conexo si (Y, T_Y) lo es.

El siguiente resultado es muy útil para demostrar la conexidad de algunos subconjuntos, como veremos más adelante.

Proposición 6.1.3 *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y $Z \subset X$ es conexo entonces $f(Z) \subset Y$ es conexo.*

Demostración:

Basta aplicar la Proposición 6.1.2 a la restricción $f_{|Z} : (Z, T_Z) \to (f(Z), T_{f(Z)})$, continua y sobre. ■

Aplicando al caso de los subespacios la Proposición 6.1.1, se tienen caracterizaciones que utilizan abiertos o cerrados de la topología inducida. También es posible enunciar otras en términos de abiertos o cerrados del espacio total.

Proposición 6.1.4 *Sea (X, T) un espacio topológico e $Y \subset X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *Y es conexo.*

b) *Si $A_1, A_2 \in T$ verifican que $Y \subset A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cap A_2 \cap Y = \emptyset$, entonces $Y \subset A_1$ ó $Y \subset A_2$.*

c) *Si F_1, F_2 son cerrados en X verificando que $Y \subset F_1 \cup F_2$ y $F_1 \cap F_2 \cap Y = \emptyset$, entonces $Y \subset F_1$ ó $Y \subset F_2$.*

Demostración:

"$(a) \Rightarrow (b)$" Sean $A_1, A_2 \in T$ con $Y \subset A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cap A_2 \cap Y = \emptyset$. Entonces $A_1 \cap Y$, $A_2 \cap Y \in T_Y$ verifican que $(A_1 \cap Y) \cup (A_2 \cap Y) = (A_1 \cup A_2) \cap Y = Y$ y $(A_1 \cap Y) \cap (A_2 \cap Y) = A_1 \cap A_2 \cap Y = \emptyset$. Como Y es conexo se deduce que $A_1 \cap Y = \emptyset$ ó $A_2 \cap Y = \emptyset$, y como $Y \subset A_1 \cup A_2$ entonces $Y \subset A_1$ ó $Y \subset A_2$.

"$(b) \Rightarrow (c)$" Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$ tales que $Y \subset F_1 \cup F_2$ y $F_1 \cap F_2 \cap Y = \emptyset$. Entonces $X - F_1$ y $X - F_2$ son abiertos en X verificando $Y \subset (X - F_1) \cup (X - F_2)$ y $(X - F_1) \cap (X - F_2) \cap Y = \emptyset$. Por hipótesis se tiene que $Y \subset X - F_1$ ó $Y \subset X - F_2$. Luego $Y \subset Y - F_1$ ó $Y \subset Y - F_2$. Pero como $F_1 \cap F_2 \cap Y = \emptyset$ entonces $Y \subset F_1$ ó $Y \subset F_2$.

"$(c) \Rightarrow (a)$" Supongamos que Y es la unión disjunta de dos cerrados $F_1 \cap Y$ y $F_2 \cap Y$ de la topología inducida. Como $(F_1 \cup F_2) \cap Y = (F_1 \cap Y) \cup (F_2 \cap Y) = Y$, se tiene que $Y \subset F_1 \cup F_2$, y por otro lado $F_1 \cap F_2 \cap Y = (F_1 \cap Y) \cap (F_2 \cap Y) = \emptyset$. Luego se puede aplicar la hipótesis para concluir que $Y \subset F_1$ ó $Y \subset F_2$. Así $Y = F_1 \cap Y$ ó $Y = F_2 \cap Y$, y como $F_1 \cap F_2 \cap Y = \emptyset$ se concluye que $F_1 \cap Y = \emptyset$ ó $F_2 \cap Y = \emptyset$.

■

Veamos a continuación unas propiedades de los subconjuntos conexos que pueden ser muy útiles.

Proposición 6.1.5 *Sea (X, T) un espacio topológico y un subconjunto conexo Y de X. Si $Z \subset X$ verifica que $Y \subset Z \subset Cl(Y)$ entonces Z es conexo.*

Demostración:

Sean $U, V \in T$ tales que $Z \subset U \cup V$ y $U \cap V \cap Z = \emptyset$. Como $Y \subset Z$, se tiene que $Y \subset U \cup V$ y $U \cap V \cap Y = \emptyset$. Luego al ser Y conexo se deduce que $Y \subset U$ ó $Y \subset V$. Veamos que entonces $Z \subset U$ ó $Z \subset V$:

Efectivamente, si esto no ocurriese entonces $Z \cap U \neq \emptyset$ y $Z \cap V \neq \emptyset$, y existirían $x \in Z \cap U$, $y \in Z \cap V$. Como $x, y \in Z \subset Cl(Y)$, $U \in Ent(x)$ y $V \in Ent(y)$ se deduce que $Y \cap U \neq \emptyset$ e $Y \cap V \neq \emptyset$, lo cual contradice que $Y \subset U$ ó $Y \subset V$. ■

Como consecuencia inmediata, cuando $Z = Y$ se deduce la siguiente propiedad.

Corolario 6.1.3 *La clausura de un subconjunto conexo es un subconjunto conexo.*

La unión de conexos no es conexa en general. Para encontrar un contraejemplo basta considerar dos subconjuntos unitarios distintos en un espacio discreto. Veamos una condición suficiente que garantiza que ciertas uniones de conexos sí que son conexas.

Proposición 6.1.6 *Dada una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico, si uno de ellos tiene intersección no vacía con todos los demás entonces la unión de todos es también un subconjunto conexo.*

Demostración:

Sea (X, T) un espacio topológico y sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ una colección de subespacios conexos tal que existe $i_0 \in I$ con $Y_{i_0} \cap Y_i \neq \emptyset$, para todo $i \in I$. Denotaremos $Y = \bigcup_{i\in I} Y_i$

Si $A_1, A_2 \in T$ son tales que $Y \subset A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cap A_2 \cap Y = \emptyset$ entonces $Y_i \subset A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cap A_2 \cap Y_i = \emptyset$, para todo $i \in I$. Como Y_i son conexos se deduce que $Y_i \subset A_1$ ó $Y_i \subset A_2$, para todo $i \in I$. En particular se deduce que $Y_{i_0} \subset A_1$ ó $Y_{i_0} \subset A_2$.

Si suponemos que $Y_{i_0} \subset A_1$ entonces $Y_i \subset A_1$ para todo $i \in I$, puesto que $Y_i \cap Y_{i_0} \neq \emptyset$. En consecuencia $Y \subset A_1$. Análogamente, en el caso de que $Y_{i_0} \subset A_2$ se tiene que $Y \subset A_2$.

Se concluye entonces que Y es conexo. ■

Veamos a continuación unos importantes ejemplos relacionados con la conexidad en espacios euclídeos.

Ejemplo 6.1.10 Los subconjuntos conexos de la recta real usual son los intervalos, esto es, los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de la forma $(-\infty, \infty)$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Nótese que, en particular, los conjuntos unitarios y el conjunto vacío son intervalos ($\{a\} = [a, a]$ y $\emptyset = (a, a)$). Es fácil comprobar que una definición equivalente es la siguiente:

Un subconjunto Y de $\mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si para todos $x, y \in A$, con $x < y$, se tiene que todo número real z tal que $x \leq z \leq y$ también pertenece a Y.

Teniendo esto claro, no es difícil probar lo afirmado.

- Supongamos que Y no es un intervalo. Entonces existen $x_0, y_0 \in Y$ con $x_0 < y_0$, y existe un z_0 con $x_0 \leq z_0 \leq y_0$ tal que $z_0 \notin Y$. Los abiertos $A_1 = (-\infty, z_0)$ y $A_2 = (z_0, +\infty)$ de T_u verifican que $Y \subset A_1 \cup A_2$, $Y \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $Y \not\subset A_1$ e $Y \not\subset A_2$. Por consiguiente, Y no es conexo.

- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

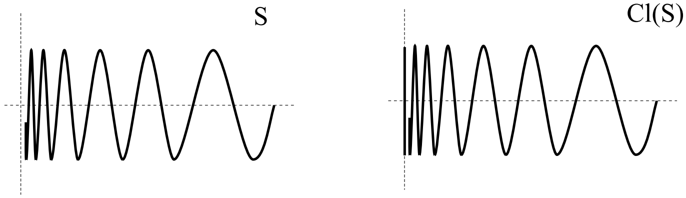
  El intervalo (a, b) es conexo, pues $(\mathbb{R}, T_u)$ es conexo, $(\mathbb{R}, T_u)$ es homeomorfo a $((a, b), (T_u)_{(a,b)})$ (Ejemplo 3.3.5) y la conexidad es una propiedad topológica (Corolario 6.1.1).

  El resto de los intervalos acotados, $Y = (a, b]$ ó $Y = [a, b)$ ó $Y = [a, b]$, son conexos. Esto es consecuencia inmediata de la Proposición 6.1.5, pues $(a, b) \subset Y \subset Cl((a, b)) = [a, b]$.

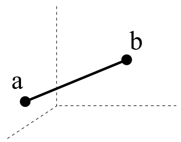
  Por último, los intervalos no acotados $(-\infty, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ ó $(-\infty, b)$, son también conexos. Esto es consecuencia de la Proposición 6.1.6, pues por ejemplo $[a, \infty) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [a, a + n)$. En el resto de los casos se procede de forma análoga.

Ejemplo 6.1.11 El subconjunto $S = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \ / \ x \in (0, \infty)\}$ del plano usual es conexo, como se prueba sin más que aplicar la Proposición 6.1.3, al ser la imagen de la aplicación continua $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (t, sen(\frac{1}{t}))$. Nótese que $(0, \infty)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ (Ejemplo 6.1.10 anterior).

La clausura de S, resultado de añadir a S el segmento $(\{0\} \times [-1, 1])$, es también conexo por el Corolario 6.1.3.



Ejemplo 6.1.12 Los segmentos son subconjuntos conexos de los espacios n-dimensionales usuales $\mathbb{R}^n$. Para probarlo basta aplicar de nuevo la Proposición 6.1.3, pues un segmento no es otra cosa que la imagen del intervalo $[0, 1]$ (conexo en $\mathbb{R}$ por el Ejemplo 6.1.10) por la aplicación continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(t) = (1 - t)a + tb$.

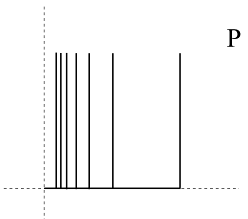


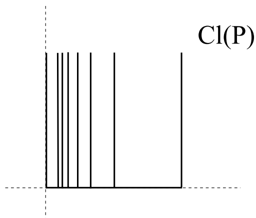
Ejemplo 6.1.13 Consideremos el subconjunto del plano usual, que se suele denominar *el peine*, definido por

$$P = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1])$$

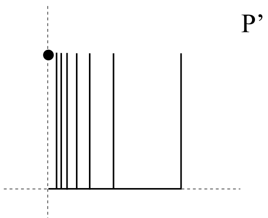
Como todos los segmentos que lo forman son conexos (Ejemplo 6.1.12) y $[0,1] \times \{0\}$ tiene intersección no vacía con todos los demás, aplicando la Proposición 6.1.6 se tiene que P es conexo.

Además, su clausura se obtiene sin más que añadir al peine el segmento $\{0\} \times [0,1]$, y también es conexa por el Corolario 6.1.3.



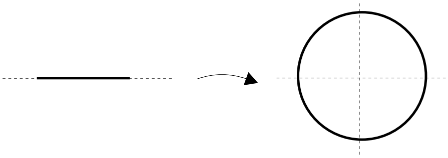


Ejemplo 6.1.14 Consideremos ahora una variante del ejemplo anterior que se suele denominar, de forma muy gráfica, *el peine y la pulga.* Consiste en el subespacio P' del plano afín resultante de añadir al peine el punto $(0,1)$ (la pulga).

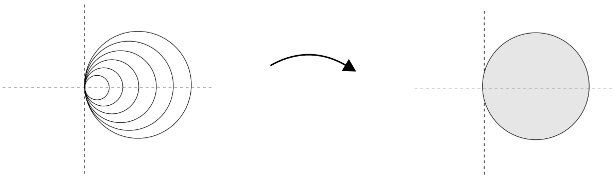


Como $P \subset P' \subset Cl(P)$, la Proposición 6.1.5 garantiza que P' es conexo.

Ejemplo 6.1.15 La circunferencia es un subconjunto conexo del plano usual. Esto se deduce de la Proposición 6.1.3, teniendo en cuenta que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t))$ es continua, $f([0,1]) = S^1$ y $[0,1]$ es un conexo en $\mathbb{R}$, por el Ejemplo 6.1.10.



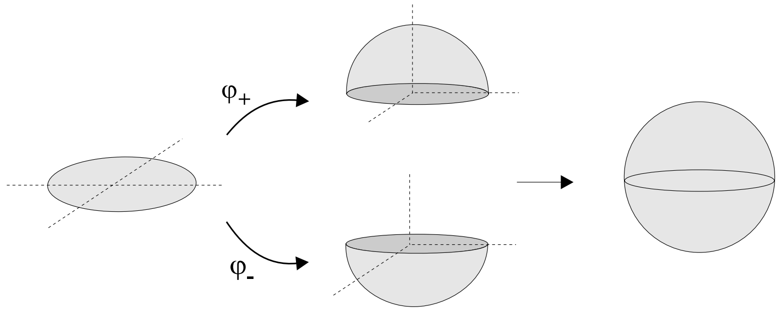
Ejemplo 6.1.16 Por el Ejemplo 6.1.15 anterior y al ser la conexidad una propiedad topológica, sabemos que todas las circunferencias del tipo $S^1_r \equiv (x-r)^2 + y^2 = r^2$, para $0 < r \leq 1$, son subconjuntos conexos del plano usual. Además, como el punto $(0,0)$ pertenece a la intersección de todas ellas, por la Proposición 6.1.6 se tiene que la unión de todas esas circunferencias es también un conexo en el plano. Pero esta unión es el círculo $C \equiv (x-1)^2 + y^2 \leq 1$.



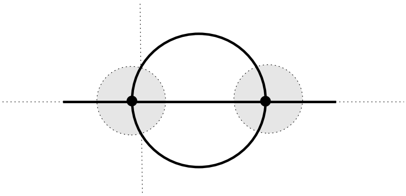
Ejemplo 6.1.17 El Ejemplo 6.1.16 y el hecho de ser la conexidad una propiedad topológica garantizan que las bolas cerradas son subconjuntos conexos del plano usual. Como las aplicaciones $\varphi_+, \varphi_- : \overline{B}((0,0),1) \to \mathbb{R}^3$ definidas por

$$\varphi_\pm((x,y)) = (x, y, \pm\sqrt{1-(x^2+y^2)})$$

son continuas, y sus respectivas imágenes son los hemisferios de S^2, por la Proposición 6.1.3 se tiene que estos hemisferios son subconjuntos conexos del espacio tridimensional usual. Usando ahora la Proposición 6.1.6 se concluye que la esfera es también un conexo en este espacio.



Ejemplo 6.1.18 El segmento $Y = [-2,2] \times \{0\}$ y la circunferencia S^1 son subconjuntos conexos del plano usual (Ejemplos 6.1.12 y 6.1.15), pero $Y \cap S^1 = \{(-1,0),(1,0)\}$ no es conexo, pues es claro que los abiertos $U = B((-1,0),\frac{1}{2})$ y $V = B((1,0),\frac{1}{2})$ contradicen las condiciones del apartado (b) de la Proposición 6.1.4.



Este ejemplo prueba que, en general, la intersección de conexos no es conexa.

Hemos dejado para este momento el estudio de la relación entre conexidad y producto, pues usando la anterior Proposición 6.1.6 la demostración se simplifica bastante.

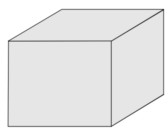
Proposición 6.1.7 *Un espacio producto $X \times Y$ es conexo si y sólo si X e Y lo son.*

Demostración:

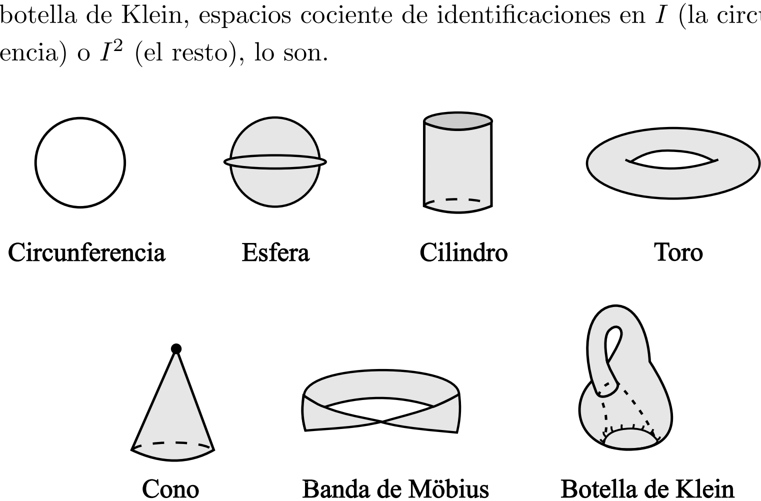
($\Rightarrow$) Como las proyecciones son aplicaciones continuas y sobreyectivas, aplicando la Proposición 6.1.2 se tiene que si $X \times Y$ es conexo entonces $X = p_X(X \times Y)$ e $Y = p_Y(X \times Y)$ también lo son.

($\Leftarrow$) Fijado $x_0 \in X$, se tiene que $X \times Y = (\bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$. Como los espacios X y $X \times \{y\}$ son homeomorfos para todo $y \in Y$, y $\{x_0\} \times Y$ e Y también lo son, hemos puesto $X \times Y$ como unión de conexos de forma que uno de ellos ($\{x_0\} \times Y$) interseca a todos los demás. Por la Proposición 6.1.6 se tiene que $X \times Y$ es conexo. ■

Ejemplo 6.1.19 El n-cubo unidad $I^n = I \times \overset{n)}{\cdots} \times I \subset \mathbb{R}^n$ es conexo, por el Ejemplo 6.1.10 y la Proposición 6.1.7 anterior.



Ejemplo 6.1.20 Como consecuencia del Corolario 6.1.2 y del Ejemplo 6.1.19 anterior, se tiene que todos los espacios obtenidos mediante identificación topológica en un n-cubo son conexos. En particular, la circunferencia, la esfera, el cilindro, el toro, el cono, la banda de Möbius y la botella de Klein, espacios cociente de identificaciones en I (la circunferencia) o I^2 (el resto), lo son.



Los casos de la circunferencia y la esfera ya se habían visto por otros métodos, y la conexidad del toro $T = S^1 \times S^1$ también se deduce del Ejemplo 6.1.15 y la Proposición 6.1.7.

Se dice que un punto de un espacio topológico está *conectado* a otro si existe un subconjunto conexo que tiene a ambos como elementos. Esta relación verifica propiedades muy conocidas en matemáticas.

Proposición 6.1.8 La relación "estar conectado" es de equivalencia en el conjunto X.

Demostración:

a) *Reflexiva*: si $x \in X$ basta observar que $A = \{x\}$ es conexo.

b) *Simétrica*: Obvia por definición.

c) *Transitiva*: Si x está conectado a y por el conexo Y e y está conectado a z por el conexo Z entonces x está conectado a z por el conexo $Y \cup Z$. Nótese que $Y \cup Z$ es conexo puesto que $y \in Y \cap Z \neq \emptyset$ (Proposición 6.1.6).

■

Los elementos del conjunto cociente asociado a esta relación de equivalencia recibirán un nombre muy particular.

Definición 6.1.3 La clase de equivalencia de un punto x en un espacio (X, T) por la relación "estar conectado" se denominará *componente conexa de* x, y se denotará por $C(x)$.

Como las clases de equivalencia siempre forman una partición del conjunto donde se define la relación, se deduce que si $x, y \in X$ entonces $C(x) = C(y)$ ó $C(x) \cap C(y) = \emptyset$. Además, las componentes conexas son los subconjuntos conexos maximales del espacio topológico:

Proposición 6.1.9 *La componente conexa de un punto es el mayor subconjunto conexo que contiene al punto.*

Demostración:

Si x es un punto de un espacio topológico (X, T), es sencillo comprobar que $C(x)$ es la unión de todos los conexos que tienen a x como elemento. Como $\{x\}$ es uno de esos conexos e interseca a todos los demás, aplicando la Proposición 6.1.6 se tiene que $C(x)$ es conexo. El resto de la demostración es inmediato. ■

Corolario 6.1.4 Dado un punto x de un espacio (X, T):

a) $C(x)$ es un cerrado.

b) Si X es conexo entonces $C(x) = X$.

Demostración:

Como $x \in Cl(C(x))$ y $Cl(C(x))$ es conexo (Corolario 6.1.5) se tiene que $Cl(C(x)) \subset C(x)$ (Proposición 6.1.9), y consecuentemente $Cl(C(x)) = C(x)$.

La segunda parte es evidente. ■

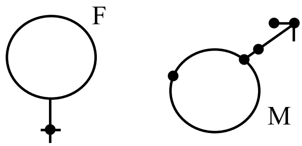
Nótese que, en general, las componentes conexas no son abiertos. Por ejemplo, en el conjunto de los números racionales con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$, los conjuntos unitarios son las componentes conexas, y no son abiertos.

Es fácil probar, y se deja como ejercicio, el siguiente resultado.

Proposición 6.1.10 *Si dos espacios son homeomorfos, tienen el mismo número de componentes conexas.*

Esto es de gran utilidad, como vamos a ver a continuación.

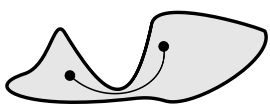
Ejemplo 6.1.21 Los sexos masculino y femenino no son homeomorfos. Bueno, lo explicamos un poco mejor. Las siguientes figuras no son homeomorfas.



La demostración es que si a F le quitamos el punto señalado, el espacio que queda tiene cuatro componentes conexas, mientras que el complementario en M de la imagen del punto es conexo, o bien tiene 2 ó 3 componentes conexas. Por el Corolario 3.3.1 y la Proposición 6.1.10 anterior, se tiene que F y M no pueden ser homeomorfos.

6.2. Espacios conexos por caminos

Hay otra manera de interpretar el concepto de conexidad si pensamos que un espacio es "de una sola pieza" cuando es posible desplazarse entre dos puntos cualesquiera del espacio sin salir del mismo.



Para formalizar esta intuición es necesario introducir el siguiente concepto.

Definición 6.2.1 Dado un espacio topológico (X, T), se denomina *camino en* X a cualquier aplicación continua $\alpha : I \rightarrow X$, donde I representa el intervalo unidad $[0,1]$ con topología asociada la inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

Si α es un camino en X con $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$, se dirá que α *es un camino con origen* x *y final* y.

Hay una serie de caminos distinguidos que son muy importantes en topología.

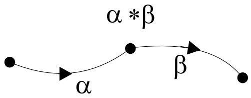
Proposición 6.2.1 *Dado un espacio topológico* (X, T)*,* *a)* *Para todo punto $x \in X$, la aplicación $\alpha : I \to X$, definida por $\alpha(t) = x$ para todo $t \in I$, es un camino denominado camino constante en x.*

b) *Si α es un camino en X entonces la aplicación $\overline{\alpha} : I \to X$, definida por $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$, es un camino denominado camino inverso de α.*

c) *Si α y β son caminos en X verificando que $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces la aplicación $\alpha * \beta : I \to X$ definida por*

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \textit{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & , \textit{ si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es un camino, denominado camino producto de α con β.



Demostración:

(a) Consecuencia de que las aplicaciones constantes son siempre continuas.

(b) La aplicación $f : (\mathbb{R}, T_u) \to (\mathbb{R}, T_u)$ definida por $f(t) = 1 - t$ es continua, pues la antimagen de todo intervalo abierto es un intervalo abierto ($f^{-1}((a,b)) = (1-b, 1-a)$). Por los apartados ($c$) y ($d$) de la Proposición 3.1.4 se tiene que $f_{|I} : I \to I$ es también continua. De nuevo por la Proposición 3.1.4 se concluye que $\overline{\alpha} = \alpha f_{|I}$ es continua.

(c) Las aplicaciones $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $g(t) = 2t$ y $h(t) = 2t-1$ son continuas, pues $g^{-1}((a,b)) = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ y $h^{-1}((a,b)) = (\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2})$. Usando los mismos argumentos que en apartado anterior se tiene que las aplicaciones $\alpha' = \alpha g_{|[0,\frac{1}{2}]} : [0, \frac{1}{2}] \to X$ y $\beta' = \beta h_{|[\frac{1}{2},1]} : [\frac{1}{2}, 1] \to X$ son continuas. Por el Lema de Continuidad (Proposición 3.1.6) se concluye que $\alpha * \beta$ es continua.

■

Ahora sí podemos introducir la nueva forma de interpretar la conexidad.

Definición 6.2.2 Un espacio topológico (X, T) se dirá *conexo por caminos* cuando para todo par de puntos $x, y \in X$ existe un camino $\alpha : I \to X$ con origen x y final y.

Aunque en esta definición se exige que cualquier par de puntos pueda ser unido por un camino, esto es equivalente a que todos los puntos se puedan unir con uno fijo, lo cual es útil en ocasiones.

Proposición 6.2.2 *Un espacio topológico (X, T) es conexo por caminos si y sólo si existe un punto $x \in X$ tal que para todo punto $y \in X$ existe un camino $\alpha_{x,y}$ en X con origen x y final y.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Evidente, por definición.

($\Leftarrow$) Dados dos puntos cualesquiera $y, z \in X$, el camino $\overline{\alpha_{x,y}} * \alpha_{x,z}$ tiene por origen y y por final z.

Podría parecer que la conexidad y la conexidad por caminos son la misma propiedad, pues ambas determinan a su manera si los espacios son "de una pieza". Sin embargo esto no es cierto, y sólo se puede asegurar lo siguiente.

Proposición 6.2.3 *Todo espacio topológico conexo por caminos es conexo.*

Demostración:

Sea (X, T) un espacio topológico conexo por caminos. Si $\alpha : I \to X$ es un camino, entonces $\alpha(I)$ es un subconjunto conexo de X, pues la imagen continua de todo conexo es un conexo (Proposición 6.1.3).

Por la Proposición 6.2.2, existe un punto $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ hay un camino $\alpha_{x,y}$ con origen x y final y. Por tanto, $X = \bigcup_{y \in X} \alpha_{x,y}(I)$ es un conexo, por la Proposición 6.1.6. ■

Todos los espacios no conexos que se vieron en la lista de ejemplos posterior a la definición de espacio conexo tampoco serán conexos por caminos, por la anterior Proposición 6.2.3. A continuación estudiaremos los espacios conexos de esa lista, pues esos pueden ser conexos por caminos o no.

Ejemplo 6.2.1 Sea $X = \{a, b, c\}$ con la topología $T = \{X, \emptyset, \{a\}\}$. Por la Proposición 6.2.2, si conseguimos definir caminos entre a y el resto de puntos ya habremos probado que el espacio es conexo por caminos. Pero para $x = b, c$ la aplicación $\alpha_{a,x} : I \to X$ definida por $\alpha_{a,x}(t) = a$ si $t \in [0, 1)$ y $\alpha_{a,x}(1) = x$ es continua ($\alpha_{a,x}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $\alpha_{a,x}^{-1}(X) = I$ y $\alpha_{a,x}^{-1}(\{a\}) = [0, 1)$ son abiertos en la topología inducida en I por la usual).

Ejemplo 6.2.2 Todo espacio topológico indiscreto es conexo por caminos, pues dados dos puntos cualesquiera x, y se puede definir un camino entre ambos por $\alpha_{x,y}(t) = x$ si $t \in [0, 1)$ y $\alpha_{x,y}(1) = y$, pues cualquier aplicación que llega a un espacio indiscreto es continua.

Ejemplo 6.2.3 Sea $Y \subset X$ con $\emptyset \neq Y \neq X$.

Con la topología de superconjuntos de Y, X es conexo por caminos, pues es posible definir un camino entre dos puntos cualesquiera $x, y \in X$ por $\alpha_{x,y}(t) = y_0 \in Y$ si $t \in (0, 1)$, $\alpha_{x,y}(0) = x$ y $\alpha_{x,y}(1) = y$. Esta aplicación es continua, pues si A es un abierto no vacío entonces $Y \subset A$ y

$$\alpha_{x,y}^{-1}(A) = \begin{cases} [0,1] \in T_{[0,1]} & si\ x, y \in A \\ (0,1) \in T_{[0,1]} & si\ x, y \notin A \\ [0,1) \in T_{[0,1]} & si\ x \in A,\ y \notin A \\ (0,1] \in T_{[0,1]} & si\ x \notin A,\ y \in A \end{cases}$$

Con la topología de subconjuntos de Y, X es también conexo por caminos, pues se puede definir un camino entre dos puntos cualesquiera

$x, y \in X$ por $\alpha_{x,y}(t) = x$ si $t \in [0, \frac{1}{2})$, $\alpha_{x,y}(t) = y$ si $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ y $\alpha_{x,y}(\frac{1}{2}) = x_0 \in X - Y$. Esta aplicación es continua, pues si A es un abierto de X distinto del total entonces $A \subset Y$ y:

$$\alpha_{x,y}^{-1}(A) = \begin{cases} [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1] \in T_{[0,1]} & si\ x, y \in A \\ \emptyset \in T_{[0,1]} & si\ x, y \notin A \\ [0, \frac{1}{2}) \in T_{[0,1]} & si\ x \in A,\ y \notin A \\ (\frac{1}{2}, 1] \in T_{[0,1]} & si\ x \notin A,\ y \in A \end{cases}$$

Ejemplo 6.2.4 Consideremos la topología cofinita sobre un conjunto X no vacío ni unitario.

Si X es contable entonces no es conexo por caminos. De hecho no existe ninguna aplicación continua y no constante $\alpha : I \to X$, pues si existiese entonces $\{\alpha^{-1}(x) \ / \ x \in X\}$ sería una colección contable de cerrados disjuntos (pues los conjuntos unitarios son cerrados en T_{cof} y α es continua) cuya unión es $[0, 1]$. Pero esto es imposible.

Si X no es contable entonces es conexo por caminos. Como $C \leq Card(X)$ (véase la hipótesis del continuo en el Apéndice A) para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un subconjunto Y de X cuyo cardinal es el del continuo verificando que $x, y \in Y$. Por el apartado (a) de la Proposición A.5.1 y la Proposición A.5.8 se tiene que $Card(Y) = Card([0, 1])$, luego es posible construir una biyección $\alpha : [0, 1] \to Y$ verificando que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Es fácil demostrar que cualquier aplicación inyectiva $\alpha : [0, 1] \to X$ es continua (pues la antimagen de todo cerrado es un cerrado), luego α es un camino con origen x y final y.

Ejemplo 6.2.5 $(\mathbb{R}, T_u)$ es conexo por caminos, pues dados dos puntos cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se puede definir un camino desde x en y por $\alpha_{x,y}(t) = (1 - t)x + ty$.

Es evidente que la conexidad por caminos no es una propiedad hereditaria. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, T_u)$ es conexo por caminos, y cualquier subconjunto no conexo tampoco es conexo por caminos (Proposición 6.2.3).

En cambio sí es una propiedad topológica. Esto se prueba introduciendo un resultado previo más general, como se hizo en el caso de la conexidad, y también se obtienen consecuencias similares. Sin embargo, en la demostración se utiliza un razonamiento diferente.

Proposición 6.2.4 *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y sobre, y X es conexo por caminos entonces Y es conexo por caminos.*

Demostración:

Sean $y, y' \in Y$. Como f es sobre, existen $x, x' \in X$ tales que $f(x) = y$ y $f(x') = y'$. Al ser X conexo por caminos, existe un camino α en X con origen x y final x'. Por tanto, $f\alpha$ es un camino en Y con origen y y final y'. ■

Corolario 6.2.1 La conexidad por caminos es una propiedad topológica.

También aquí, como consecuencia de la Proposición 6.2.4:

Corolario 6.2.2 *Si $f : X \to Y$ es una identificación y el espacio X es conexo por caminos entonces Y también lo es. En particular, si X es un espacio conexo por caminos y R es una relación de equivalencia sobre X entonces el espacio cociente X/R es conexo por caminos.*

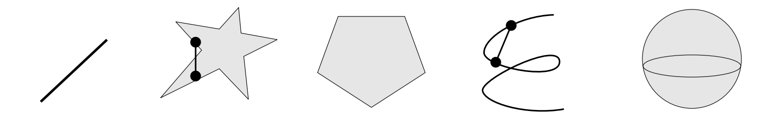
El concepto de subconjunto conexo por caminos de un espacio topológico se introduce de forma análoga al de subconjunto conexo.

Definición 6.2.3 Un subconjunto de un espacio topológico se dirá *conexo por caminos* si lo es con la topología inducida.

Aplicando la Proposición 6.2.4 a las aplicaciones restricción de forma similar a lo hecho en la demostración de la Proposición 6.1.3, se puede obtener un resultado que será de utilidad para determinar que ciertos subconjuntos son conexos por caminos.

Proposición 6.2.5 *Si $f : X \to Y$ una aplicación continua y $Z \subset X$ es conexo por caminos, entonces $f(Z) \subset Y$ es conexo por caminos.*

Ejemplo 6.2.6 Un *subconjunto* Y de $\mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si para todos $x, y \in Y$ y todo $t \in [0, 1]$ se verifica que $(1 - t)x + ty \in Y$. Nótese que si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, se ha considerado $tx = (tx_1, ..., tx_n)$, y análogamente $(1 - t)x$.



Convexo No convexo Convexo No convexo Convexo (esfera maciza)

Todo subconjunto convexo de $Y \subset \mathbb{R}^n$ es conexo por caminos, pues para todo par de puntos $x, y \in Y$ la aplicación $\alpha : I \to Y$ definida por $\alpha(t) = (1-t)x + ty$ es un camino en Y con origen x y final y. Además, en la figura anterior se observa que hay espacios no convexos que son conexos por caminos (la estrella o la curva).

En particular, los segmentos son conexos por caminos en $\mathbb{R}^n$, puesto que son convexos.

Ejemplo 6.2.7 En la recta real usual, los subconjuntos conexos por caminos son los intervalos.

Todo subconjunto conexo por caminos es conexo, y por tanto es un intervalo. Recíprocamente, todo intervalo es convexo y en consecuencia conexo por caminos (Ejemplo 6.2.6).

Ejemplo 6.2.8 Como consecuencia de la Proposición 6.2.5 se tiene que la circunferencia es un subconjunto conexo por caminos del plano usual, pues es la imagen del intervalo $[0,1]$ (conexo por caminos por el Ejemplo 6.2.7) por la aplicación continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t))$.

Ejemplo 6.2.9 También por la Proposición 6.2.5, el subconjunto

$$S = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \ / \ x \in (0,\infty)\}$$

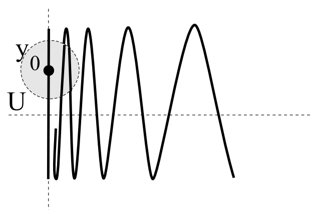
del plano usual es conexo por caminos, como se puede probar con un razonamiento similar al usado en el Ejemplo 6.1.11. Sin embargo su clausura, que es la unión de S con el segmento $\{0\} \times [-1,1]$, no es conexa por caminos.

Vamos a corroborar la idea intuitiva de que si un camino tiene origen en el segmento $\{0\} \times [-1,1]$ entonces la continuidad impide que ese camino tome valores en S.

Si $\alpha : I \to Cl(S)$ es un camino con origen en el punto $(0,1)$, se probará que entonces $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1]) = [0,1]$. Por la conexidad del intervalo unidad I, bastará demostrar que $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ es un abierto y cerrado en I distinto del vacío.

Como $\{0\} \times [-1,1]$ es cerrado y α es continua se tiene que $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ es cerrado. Además, $0 \in \alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1]) \neq \emptyset$.

Para probar que $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ es abierto, consideremos un punto $t_0 \in I$ verificando $\alpha(t_0) = (0, y_0) \in \{0\} \times [-1,1]$. Si se considera un entorno $U = B((0,y_0),\delta) \cap Cl(S)$ de $(0,y_0)$ en $Cl(S)$ (los entornos de este tipo forman una base de entornos de ese punto en $Cl(S)$)



y tomando la base de entornos $\beta(t_0) = \{B(t_0,\varepsilon) \cap I \ / \ \varepsilon > 0\}$ en la topología de I, al ser $\alpha : I \to Cl(S)$ continua debe existir $\varepsilon_0 > 0$ con $\alpha(B(t_0,\varepsilon_0) \cap I) \subset U$. Pero las componentes conexas de U son los trocitos de curva y el segmento vertical que quedan dentro del disco en el dibujo. Además, $B(t_0,\varepsilon_0) \cap I$ es un conexo y $\alpha : B(t_0,\varepsilon_0) \cap I \to U$ es continua, luego $\alpha(B(t_0,\varepsilon_0) \cap I)$ debe estar contenido en una única componente conexa de U, que como $\alpha(t_0) = (0,y_0)$ debe ser el segmento vertical. Por tanto $B(t_0,\varepsilon_0) \cap I \subset \alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$, y hemos probado que $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ es abierto en I.

El Ejemplo 6.2.9 anterior muestra que la clausura de un subconjunto conexo por caminos no tiene por qué ser, en general, conexo por caminos. Sin embargo, sí que hay una propiedad relativa a la unión similar a la existente para el caso de la conexidad.

Proposición 6.2.6 *Dada una familia de subconjuntos conexos por caminos de un espacio topológico, si uno de ellos tiene intersección no vacía con todos los demás entonces la unión de todos es también un* *subconjunto conexo por caminos.*

Demostración:

Sea (X, T) un espacio topológico, y sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos conexos por caminos de X verificando que existe $i_0 \in I$ con $Y_{i_0} \cap Y_i \neq \emptyset$, para todo $i \in I$

Si $x, y \in \bigcup_{i\in I} Y_i$ existirán $i_1, i_2 \in I$ tales que $x \in Y_{i_1}$ e $y \in Y_{i_2}$. Por otro lado, existen $z_1 \in Y_{i_1} \cap Y_{i_0}$ y $z_2 \in Y_{i_2} \cap Y_{i_0}$. El camino $(\alpha * \beta) * \gamma$ es un camino en $\bigcup_{i\in I} Y_i$ con origen x y final y, donde α es un camino en Y_{i_1} con origen x y final z_1, β es un camino en Y_{i_0} con origen z_1 y final z_2 y γ es un camino en Y_{i_2} con origen z_2 y final y, todos ellos existentes al ser Y_{i_0}, Y_{i_1} y Y_{i_2} conexos por caminos. En consecuencia $\bigcup_{i\in I} Y_i$ es conexo por caminos.

Nótese que $(\alpha * \beta) * \gamma : I \to \bigcup_{i\in I} Y_i$ es continua porque α, β y γ se pueden considerar como caminos en $\bigcup_{i\in I} Y_i$, sin más que componer con las respectivas inclusiones. ■

Ejemplo 6.2.10 Consideremos el subconjunto del plano usual que hemos denominado el peine (ver Ejemplo 6.1.13).

$$(P = [0,1] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1])$$

También aquí se puede usar que todos los segmentos que lo forman son conexos por caminos (por el Ejemplo 6.2.6, pues los segmentos son convexos) y que $[0,1] \times \{0\}$ tiene intersección no vacía con todos los demás, para aplicar la Proposición 6.2.6 y probar que P es conexo por caminos.

La clausura del peine, que como ya se ha dicho es la unión del peine con el segmento $\{0\} \times [0,1]$, es también conexa por caminos, como se puede probar usando un razonamiento similar.

Sin embargo el peine y la pulga $P' = P \cup (0,1)$ (ver Ejemplo 6.1.14) no es conexo por caminos. Esto se puede probar de una forma análoga a lo hecho en el Ejemplo 6.2.9, pues el único camino con inicio en el punto $(0,1)$ es el camino constante.

Ejemplo 6.2.11 Por el Ejemplo 6.2.8, sabemos que todas las circunferencias del tipo $S^1_r \equiv (x-r)^2+y^2 = r^2$, para $0 < r \leq 1$ son subconjuntos conexos por caminos del plano usual. Además, como el punto $(0,0)$ pertenece a la intersección de todas ellas, por la Proposición 6.2.6 se tiene que el círculo $C \equiv (x-1)^2+y^2 \leq 1$ (unión de todas esas circunferencias) también es conexo por caminos en el plano.

Ejemplo 6.2.12 Las bolas cerradas son subconjuntos conexos por caminos del plano usual (Ejemplo 6.2.11 anterior) y las aplicaciones $\varphi_+, \varphi_- : \overline{B}((0,0),1) \to \mathbb{R}^2$ definidas por $\varphi_\pm((x,y)) = (x, y, \pm\sqrt{1-(x^2+y^2)})$ son continuas. Usando las Proposiciones 6.2.4 y 6.2.6, análogamente a lo hecho en el Ejemplo 6.1.17 se concluye que la esfera es también un conexo por caminos.

Ejemplo 6.2.13 El segmento $Y = [-2,2] \times \{0\}$ y la circunferencia S^1 son subconjuntos conexos por caminos del plano usual (Ejemplos 6.2.6 y 6.2.8), pero $Y \cap S^1 = \{(-1,0),(1,0)\}$ no es conexo por caminos, al no ser conexo (Ejemplo 6.1.18).

En cuanto al producto, también la conexidad por caminos tiene buenas propiedades. Para probar el siguiente resultado basta una demostración similar a la hecha para conexidad, usando las proposiciones 6.2.4 y 6.2.6 en lugar de las 6.1.2 y 6.1.6.

Proposición 6.2.7 *Un espacio producto $X \times Y$ es conexo por caminos si y sólo si X e Y lo son.*

Ejemplo 6.2.14 El n-cubo unidad $I^n = I \times \overset{n)}{\cdots} \times I \subset \mathbb{R}^n$ es conexo por caminos , por la Proposición 6.2.7 anterior.

Ejemplo 6.2.15 Como consecuencia del Corolario 6.2.2 y del Ejemplo 6.2.14 anterior, se tiene que la circunferencia, la esfera, el cilindro, el toro, el cono, la banda de Möbius y la botella de Klein, espacios cociente de identificaciones en I (la circunferencia) o I^2 (el resto), son conexos por caminos.

Usando los caminos hay una nueva manera de decir cuándo dos puntos están conectados. Es incluso más intuitiva que la ya conocida.

Se dirá que un punto x de un espacio topológico (X, T) está *conectado por un camino* con otro punto y si existe un camino en X con origen x y final y. En este caso, se dirá que el camino α conecta x con y.

También esta relación es de equivalencia, pues los caminos constantes, caminos inversos y caminos producto permiten probar las propiedad reflexiva, simétrica y transitiva, respectivamente. Así se tiene un conjunto cociente, cuyas clases de equivalencia recibirán también un nombre especial.

Definición 6.2.4 La clase de equivalencia de un punto x de un espacio (X, T) por la relación "estar conectado por caminos" se denominará *componente conexa por caminos de x*, y se denotará por $CC(x)$.

Así, los subconjuntos de un espacio topológico (X, T) de la forma

$$CC(x) = \{y \in X \ / \ existe\ un\ camino\ \alpha : I \to X\ con\ origen\ x\ y\ final\ y\}$$

serán los subconjuntos conexos por caminos maximales, que formarán una partición del conjunto X. Además, tendrán propiedades similares a las de las componentes conexas.

Proposición 6.2.8 *La componente conexa por caminos de un punto es el mayor conexo por caminos que contiene a ese punto.*

Demostración:

Si x es un punto de un espacio (X, T) entonces la componente conexa por caminos de x es la unión de todos los conexos por caminos que tienen a x como elemento, pues:

($\subset$) Si $y \in CC(x)$ entonces existe un camino $\alpha : I \to X$ con origen x y final y. Además $\alpha(I)$ es un subconjunto conexo por caminos de X, por la Proposición 6.2.5 y el Ejemplo 6.2.7, con $y \in \alpha(I)$.

($\supset$) Si existe un subconjunto conexo por caminos Y que contiene a x e y, existirá un camino α en Y conectando x con y. Pero α es también un camino en X (componiendo con la inclusión). Luego $y \in CC(x)$.

Como $\{x\}$ es un conexo por caminos de la familia que interseca a todos los demás, por la Proposición 6.2.6 se tiene que $CC(x)$ es conexo por caminos. Además se deduce que es $CC(x)$ es el mayor de los conexos por caminos que contiene a x. ■

Aunque en el tema anterior se probó que las componentes conexas de un espacio topológico son cerradas, este hecho no es cierto para componentes conexas por caminos.

Ejemplo 6.2.16 Consideremos la clausura del subespacio del plano usual S dado en el Ejemplo 6.1.11:

$$Cl(S) = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \ / \ x \in (0, \infty)\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

Las componentes conexas por caminos son $S = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \ / \ x \in (0, \infty)\}$ y el segmento $\{0\}\times[-1, 1]$, como se puede probar usando técnicas similares a las empleadas para ver que $Cl(S)$ no es conexo por caminos (Ejemplo 6.2.9). Pero S no es un cerrado en $Cl(S)$, pues para todo $(0, y_0) \in \{0\}\times[-1, 1]$ y todo entorno de la forma $U = B((0, y_0), \varepsilon) \cap Cl(S)$ se verifica que $U \cap S \neq \emptyset$, como se puede ver en la figura del Ejemplo 6.2.9.

Ejemplo 6.2.17 Tampoco es difícil probar que las componentes conexas por caminos del peine y la pulga (Ejemplos 6.1.14) son dos, precisamente el peine es una y la pulga otra. Sin embargo, ninguna de ellas es un subespacio cerrado.

Para terminar señalamos que, como ocurría para las componentes conexas:

Proposición 6.2.9 *Si dos espacios son homeomorfos, tienen el mismo número de componentes conexas por caminos.*

Capítulo 7

Compacidad

La compacidad es una propiedad que proporciona, a los espacios que la verifican, subrecubrimientos finitos de cualquier recubrimiento formado por abiertos. Esto se traduce en que los espacios compactos tienen muy buenas propiedades, como por ejemplo que cualquier aplicación real con variable en un espacio compacto alcanza su mínimo y su máximo.

Para introducir los espacios compactos, necesitaremos precisar el concepto de recubrimiento de la Definición A.2.3, definiendo un tipo especial en espacios topológicos. Así, se denominará *recubrimiento abierto de un espacio topológico* (X, T) a cualquier recubrimiento de X cuyos elementos sean subconjuntos abiertos de X.

Definición 7.1 Se dice que un espacio topológico (X, T) es *compacto* si cualquier recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.

Ejemplo 7.1 Cualquier espacio topológico verificando que sólo haya un número finito de abiertos distintos es compacto, pues todo recubrimiento abierto es finito, y se tiene a sí mismo como subrecubrimiento que garantiza la compacidad. En consecuencia todo espacio topológico (X, T) con X un conjunto finito es compacto, ya que sólo hay un número finito de abiertos distintos ($Card(T) \leq Card(\mathcal{P}(X)) = 2^{Card(X)}$).

Ejemplo 7.2 Todo espacio indiscreto es compacto, como consecuencia del Ejemplo 7.1.

Ejemplo 7.3 Los únicos espacios discretos (X, T_D) que son compactos son los finitos. Efectivamente, si X es infinito entonces $\mathcal{R} = \{\{x\}\}_{x \in X}$ es un recubrimiento abierto cuyo único subrecubrimiento es él mismo. En particular, no admite ningún subrecubrimiento finito.

Ejemplo 7.4 Si dado $Y \subset X$ se considera en X la topología de superconjuntos de Y, entonces X es compacto si y sólo si $X - Y$ es finito.

Si $X - Y$ es infinito entonces $\mathcal{R} = \{Y \cup \{x\}\}_{x \in X-Y}$ es un recubrimiento abierto que no admite ningún subrecubrimiento finito.

Si $X - Y$ es finito y $\mathcal{R}$ es un recubrimiento abierto de X, entonces fijado $A_{i_0} \in \mathcal{R}$ se tiene que $Y \subset A_{i_0}$. Por tanto $X - A_{i_0} \subset X - Y$ será un conjunto finito, que podemos representar por $X - A_{i_0} = \{x_1, ..., x_n\}$. Para $1 \leq k \leq n$ existirá $A_{i_k} \in \mathcal{R}$ con $x_k \in A_{i_k}$, y por tanto $\mathcal{S} = \{A_{i_0}, A_{i_1}, ..., A_{i_n}\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$.

Ejemplo 7.5 Si ahora se considera en un conjunto X la topología de subconjuntos de $Y \subsetneq X$, entonces (X, T_Y) es compacto. Basta tener en cuenta que el único abierto que contiene a puntos de $X - Y$ es X, luego todo recubrimiento abierto $\mathcal{R}$ de X debe tener como elemento al total, y por tanto $\mathcal{S} = \{X\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$. Obsérvese que si $Y = X$ entonces T_Y es la topología discreta, ya estudiada (Ejemplo 7.3).

Ejemplo 7.6 Cualquier espacio cofinito es compacto. Si $\mathcal{R}$ es un recubrimiento abierto de X en la topología cofinita, entonces fijado $A_{i_0} \in \mathcal{R}$ se tiene que $X - A_{i_0} = \{x_1, ..., x_n\}$ es un conjunto finito. Para $1 \leq k \leq n$ existirá $A_{i_k} \in \mathcal{R}$ con $x_k \in A_{i_k}$, y por tanto $\mathcal{S} = \{A_{i_0}, A_{i_1}, ..., A_{i_n}\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$.

Ejemplo 7.7 $(\mathbb{R}, T_u)$ no es compacto, pues $\{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto que no admite ningún subrecubrimiento finito. Como consecuencia, los espacios métricos no tienen por qué ser compactos.

Ejemplo 7.8 Con la topología de Sorgenfrey, $\mathbb{R}$ tampoco es compacto, pues el recubrimiento abierto $\{[-n, \infty)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no admite ningún subrecubrimiento finito.

En el ejemplo 7.5 se ha probado que dado conjunto X, la topología de subconjuntos de $Y \subsetneq X$ hace que X sea un espacio compacto. Sin embargo, por el Ejemplo 2.1.4 sabemos que basta tomar $Z \subset Y$ para que la topología inducida por T_Y en Z sea la discreta, y si Z es infinito $(Z, (T_Y)_Z)$ no será compacto (Ejemplo 7.3). Así pues, la compacidad no es una propiedad hereditaria.

Sin embargo, sí que se comporta muy bien respecto a las aplicaciones continuas.

Proposición 7.1 *Sea $f : X \to X'$ una aplicación continua y sobre. Si X es compacto entonces X' es compacto.*

Demostración:

Si $\mathcal{R} = \{A'_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de X' entonces, por la continuidad de f, se tiene que $f^{-1}(A'_i) \in T$ para todo $i \in I$, y además $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(A'_i) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A'_i) = f^{-1}(X') = X$. Luego $\{f^{-1}(A'_i)\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto del espacio compacto X, y por tanto admite un subrecubrimiento finito $\{f^{-1}(A_{i_k})\}_{k=1}^n$. Como f es sobre se tiene que $\bigcup_{k=1}^n A'_{i_k} = \bigcup_{k=1}^n f(f^{-1}(A'_{i_k})) = f(\bigcup_{k=1}^n f^{-1}(A'_{i_k})) = f(X) = X'$, y se concluye que $\{A'_{i_k}\}_{k=1}^n$ constituye un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$ que garantiza la compacidad de X'. ■

Corolario 7.1 *La compacidad es una propiedad topológica.*

Además, como las identificaciones son aplicaciones sobreyectivas y continuas, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 7.2 *Si $f : X \to Y$ es una identificación y el espacio X es compacto entonces el espacio Y también es compacto. En consecuencia, si X es un espacio compacto y R es una relación de equivalencia sobre X entonces el espacio cociente X/R es compacto.*

La compacidad también se comporta bien con respecto a productos.

Proposición 7.2 *Un espacio producto $X \times Y$ es compacto si y sólo si X e Y lo son.*

Demostración:

Como las proyecciones son aplicaciones continuas y sobreyectivas, por la Proposición 7.1 es claro si $X \times Y$ es compacto entonces $X = p_X(X \times Y)$ e $Y = p_Y(X \times Y)$ también lo son.

Recíprocamente, consideremos un recubrimiento abierto $\mathcal{R}$ de $X \times Y$. Si fijamos $x_0 \in X$, para todo $y \in Y$ existe $W_y^{x_0} \in \mathcal{R}$ con $(x_0, y) \in W_y^{x_0}$. Como los productos de abiertos forman una base de la topología producto, existen $U_y^{x_0} \subset X$ y $V_y^{x_0} \subset Y$ abiertos con $(x_0, y) \in U_y^{x_0} \times V_y^{x_0} \subset W_y^{x_0}$. Evidentemente $\{V_y^{x_0}\}_{y \in Y}$ es un recubrimiento abierto de Y, y como este es un espacio compacto existirá $\{V_{y_1}^{x_0}, ..., V_{y_{m_0}}^{x_0}\}$ subrecubrimiento finito. Tomando $U_{x_0} = U_{y_1}^{x_0} \cap ... \cap U_{y_{m_0}}^{x_0}$ se tiene que

$$U_{x_0} \times V_{y_1}^{x_0} \subset W_{y_1}^{x_0}, ..., U_{x_0} \times V_{y_{m_0}}^{x_0} \subset W_{y_{m_0}}^{x_0}$$

Haciendo este proceso para todos los puntos de X se obtiene un recubrimiento abierto $\{U_x\}_{x \in X}$ de X, que al ser X compacto admitirá un subrecubrimiento finito $\{U_{x_1}, ..., U_{x_n}\}$. Además, por su construcción se tendrán para $1 \leq i \leq n$ recubrimientos abiertos $\{V_{y_1}^{x_i}, ..., V_{y_{m_i}}^{x_i}\}$ de Y verificando que:

$$U_{x_i} \times V_{y_1}^{x_i} \subset W_{y_1}^{x_i}, ..., U_{x_i} \times V_{y_{m_i}}^{x_i} \subset W_{y_{m_i}}^{x_i}$$

Como para todo $(x, y) \in X \times Y$ existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in U_{x_i}$ (al ser $\{U_{x_1}, ..., U_{x_n}\}$ un recubrimiento de X) y existe $j \in \{1, .., m_i\}$ tal que $y \in V_{y_j}^{x_i}$ (al ser $\{V_{y_1}^{x_i}, ..., V_{y_{m_i}}^{x_i}\}$ recubrimientos de Y, para $1 \leq i \leq n$) se concluye que

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{n} (\bigcup_{j=1}^{m_i} U_{x_i} \times V_{y_j}^{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\bigcup_{j=1}^{m_i} W_{y_j}^{x_i})$$

y por tanto $\{W_{y_j}^{x_i}\}_{i,j=1}^{n,m_i}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$ ■

La compacidad se define para subconjuntos de un espacio topológico como ya suponemos que se debe hacer.

Definición 7.2 Un subconjunto de un espacio topológico se dirá *compacto* cuando sea un espacio compacto, con la topología inducida.

A partir de esta definición, conociendo la topología inducida se sabe directamente si un subconjunto es compacto. A continuación vamos estudiar la compacidad de subconjuntos cuyas topologías inducidas son ya conocidas.

Ejemplo 7.9 Todo subconjunto finito de un espacio es compacto, como consecuencia directa del Ejemplo 7.1.

Ejemplo 7.10 Todo subconjunto Y de un espacio indiscreto (X, T_I) es compacto, pues la topología inducida en cualquier subconjunto $Y \subset X$ por la indiscreta es de nuevo la indiscreta (Ejemplo 2.1.1) y todo espacio indiscreto es compacto (Ejemplo 7.2).

Ejemplo 7.11 Los únicos subconjuntos compactos de un espacio discreto (X, T_D) son los finitos, pues la topología inducida en cualquier subconjunto $Y \subset X$ por la discreta es de nuevo la discreta (Ejemplo 2.1.2) y un espacio discreto es compacto sólo cuando es finito (Ejemplo 7.3).

Ejemplo 7.12 Si dado $Y \subset X$ se considera la topología de superconjuntos de Y, entonces un subconjunto $Z \subset X$ es compacto si y sólo si $Z - Y = (X - Y) \cap Z$ es finito. Esto es consecuencia de que $(T^Y)_Z = T^{Y \cap Z}$ (Ejemplo 2.1.3) y de que $(Z, T^{Y \cap Z})$ es compacto si y sólo si $Z - (Y \cap Z) = Z - Y$ es finito (Ejemplo 7.4).

Ejemplo 7.13 Si ahora, dado de nuevo $Y \subset X$, se considera la topología de subconjuntos de Y, entonces $Z \subset X$ es compacto si y sólo si Z es finito o no está contenido en Y. Esto es consecuencia de que $(T_Y)_Z = T_{Y \cap Z}$ (Ejemplo 2.1.4) y de que $(Z, T_{Y \cap Z})$ es compacto si y sólo si Z es finito ó $Y \cap Z \neq Z$ (Ejemplo 7.5).

Ejemplo 7.14 Cualquier subconjunto de un espacio cofinito es compacto, pues la topología inducida por la cofinita es de nuevo la cofinita (Ejemplo 2.1.5), y cualquier espacio cofinito es compacto (Ejemplo 7.6).

Ejemplo 7.15 Los intervalos abiertos no son subconjuntos compactos de la recta real usual.

Si $a < b$ es fácil probar que $\mathcal{R} = \{(t,s)\}_{a<t<s<b}$ es un recubrimiento abierto de (a,b) que no admite ningún subrecubrimiento finito. Los casos $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, (a,∞) y $(-\infty,b)$ se resuelven de forma parecida, y se deja como ejercicio buscar los recubrimientos abiertos adecuados.

La Definición 7.2, implícitamente, maneja abiertos de la topología inducida (los pertenecientes a los recubrimientos que aparecen en la definición de compacidad). Pero, como ocurría en conexidad, es posible caracterizar la compacidad de un subconjunto en función de abiertos de la topología original.

Para simplificar los enunciados es conveniente usar una terminología derivada de la Definición A.2.4.

Definición 7.3 Dado un subconjunto Y de un espacio topológico (X,T), se llamará *recubrimiento abierto de* Y *en* X a cualquier colección $\mathcal{R} = \{A_i\}_{i\in I} \subset T$ verificando que $Y \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Proposición 7.3 Dado un espacio topológico (X,T), un subconjunto $Y \subset X$ es compacto si y sólo si todo recubrimiento abierto de Y en X admite un subrecubrimiento finito.

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{R} = \{A_i\}_{i\in I} \subset T$ tal que $Y \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Considerando $Y\cap A_i \in T_Y$, para todo $i \in I$, se tiene que $\bigcup\limits_{i\in I}(Y\cap A_i) = Y\cap(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = Y$. Por consiguiente $\{Y\cap A_i\}_{i\in I}$ constituye un recubrimiento abierto de Y, y por hipótesis existe un subrecubrimiento finito $\{Y\cap A_{i_k}\}_{k=1}^n$. Como $Y\cap(\bigcup\limits_{k=1}^n A_{i_k}) = \bigcup\limits_{k=1}^n (Y\cap A_{i_k}) = Y$, se tiene que $Y \subset \bigcup\limits_{k=1}^n A_{i_k}$, y por tanto $\mathcal{S} = \{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{R}' = \{A_i \cap Y\}_{i\in I} \subset T_Y$ tal que $Y = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap Y)$. Como $Y = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap Y) = (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap Y$, se deduce que $\mathcal{R} = \{A_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de Y en X. Por hipótesis, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{S} = \{A_{i_k}\}_{k=1}^n$ de $\mathcal{R}$. Por consiguiente $\bigcup_{k=1}^{n}(A_{i_k} \cap Y) = (\bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}) \cap Y = Y$, y $\mathcal{S}' = \{A_{i_k} \cap Y\}_{k=1}^n$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}'$.

■

Ejemplo 7.16 Si Y es un subconjunto no acotado de la recta usual entonces no es compacto, pues $\mathcal{R} = \{(-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de Y en $\mathbb{R}$ que no admite subrecubrimiento finito alguno.

Ejemplo 7.17 Los intervalos cerrados y acotados son subconjuntos compactos de la recta usual.

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. Se define

$$K = \{x \in [a, b] \ / \ \textit{existen } i_1, ..., i_n \in I \textit{ con } [a, x] \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}\}$$

Claramente $K \subset [a, b]$, y además $K \neq \emptyset$ pues $a \in K$ (existe A_j con $\{a\} = [a, a] \subset A_j$). Como $[a, b]$ es conexo (Ejemplo 6.1.10), si K fuese abierto y cerrado en $[a, b]$ ocurriría que $K = [a, b]$, y como en particular $b \in K$ se tendría el resultado.

Para probar que K es abierto en $[a, b]$ veamos que es entorno de todos sus puntos. Si $z \in K$ entonces $[a, z] \subset A_{i_1} \cup ... \cup A_{i_n}$. En particular $z \in A_{i_k}$, para algún $k \in \{1, ..., n\}$, y al ser A_{i_k} un abierto en T_u existirá $\varepsilon > 0$ con $B(z, \varepsilon) \subset A_{i_k}$. Pero claramente $B(z, \varepsilon) \cap [a, b] \subset K$.

Para probar que K es cerrado en $[a, b]$ veamos que coincide con su clausura. Obsérvese que como $Cl(K) \subset Cl([a, b]) = [a, b]$, se tiene que $Cl_{[a,b]}(K) = Cl(K) \cap [a, b] = Cl(K) \subset [a, b] \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Si $z \in Cl_{[a,b]}(K) = Cl(K)$ entonces existe $i_0 \in I$ tal que $z \in A_{i_0}$, y como $A_{i_0} \in T_u$ existe $\varepsilon > 0$ con $B(z, \varepsilon) \subset A_{i_0}$. Ahora bien, como $z \in Cl(K)$ se tiene que $B(z, \varepsilon) \cap K \neq \emptyset$, por lo que existe $z' \in B(z, \varepsilon) \cap K$. Así, $[a, z'] \subset A_{i_1} \cup$

$\ldots \cup A_{i_m}$, y por consiguiente $[a,z] \subset [a,z'] \cup B(z,\varepsilon) \subset A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_m} \cup A_{i_0}$, de donde $z \in K$.

Ejemplo 7.18 Los n-cubos $I^n \subset \mathbb{R}^n$ son compactos, pues el intervalo $I = [0,1]$ es compacto en $\mathbb{R}$ (Ejemplo 7.17 anterior) y el producto de compactos es compacto (Proposición 7.2).

Ejemplo 7.19 El subconjunto del plano usual $P = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1])$, conocido como *el peine* (ver ejemplo 6.1.13) no es compacto. Considerando $A_1 = (\frac{1}{2}, 2) \times \mathbb{R}$ y $A_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}) \times \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, se tiene que $\mathcal{R} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de P en $\mathbb{R}^2$ que no admite subrecubrimiento finito.

Ejemplo 7.20 Sabemos que considerando en un conjunto X la topología de superconjuntos de $Y \subset X$, un subconjunto $Z \subset X$ es compacto si y sólo si $Z - Y$ es finito (Ejemplo 7.12). Probemos de nuevo este hecho, pero ahora usando la Proposición 7.3

Si $Z - Y$ es infinito entonces $\mathcal{R} = \{Y \cup \{x\} \ / \ x \in Z - Y\}$ es un recubrimiento abierto de Z en X que no admite subrecubrimiento finito.

Si $Z - Y$ es finito y $\mathcal{R}$ es un recubrimiento abierto de Z en X, entonces fijado $A_{i_0} \in \mathcal{R}$ se tiene que $Y \subset A_{i_0}$. Por tanto $Z - A_{i_0} = (X - A_{i_0}) \cap Z \subset (X - Y) \cap Z = Z - Y$ será un conjunto finito, que podemos representar por $Z - A_{i_0} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Para $1 \leq k \leq n$ existirá $A_{i_k} \in \mathcal{R}$ con $x_k \in A_{i_k}$, y por tanto $\mathcal{S} = \{A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$.

Ilustraremos la importancia del concepto de compacidad usándolo para probar un conocido resultado de análisis matemático: el *Teorema de Bolzano-Weierstrass*. Para ello veremos previamente la siguiente propiedad.

Proposición 7.4 *Todo subconjunto infinito de un espacio compacto tiene puntos de acumulación.*

Demostración:

Hagamos la demostración por el contrarrecíproco.

Si $Der(A) = \emptyset$ entonces todo punto $x \in X$ tendrá un entorno abierto U_x de forma que $(U_x - \{x\}) \cap A = \emptyset$. Luego $U_x \cap A \subset \{x\}$, para todo $x \in X$. Como $\mathcal{R} = \{U_x\}_{x \in X}$ es un recubrimiento abierto de X, que es un espacio compacto, existirá un subrecubrimiento finito $\{U_{x_1}, ..., U_{x_n}\}$. Pero entonces $A = X \cap A = (U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}) \cap A = (U_{x_1} \cap A) \cup ... \cup (U_{x_n} \cap A) \subset \{x_1, ..., x_n\}$, y por tanto A será un conjunto finito. ∎

Corolario 7.3 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Cualquier sucesión real acotada tiene una subsucesión convergente.*

Demostración:

Sea $\{x_n\}$ es una sucesión real acotada. Supondremos que esta sucesión no es convergente, pues si lo fuese el resultado se tendría trivialmente. También podemos suponer que ningún término se repite un número infinito de veces, pues si esto ocurriese la subsucesión constante en dicho término sería la subsucesión convergente buscada. De esto último se deduce que la sucesión considerada tiene un número infinito de términos distintos, pues si sólo tomase un número finito de valores entonces alguno de ellos se repetiría infinitas veces.

Como $\{x_n\}$ es acotada, existe $C \in \mathbb{R}^+$ tal que $\{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \subset [-C, C]$. Pero $[-C, C]$ es un espacio compacto con la topología inducida por la usual (Ejemplo 7.17) y hemos dicho que la sucesión considerada tiene un número infinito de términos distintos, luego por la Proposición 7.4 el conjunto de términos de la sucesión tiene un punto de acumulación $x_0 \in [-C, C]$. Una forma de construir una subsucesión $\{y_n\}$ convergente a x_0 es la indicada a continuación, mostrando los tres primeros pasos:

- Se define y_1 como el primer término de la sucesión tal que $y_1 \in B(x_0, 1) - \{x_0\}$.

- Elegimos $n_1 \in \mathbb{N}$ verificando que $\frac{1}{n_1} < |y_1 - x_0|$, y se define y_2 como el siguiente término de la sucesión tal que $y_2 \in B(x_0, \frac{1}{n_1}) - \{x_0\}$.

- Elegimos $n_2 \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{n_2} < |y_2 - x_0|$, y se define y_2 como el siguiente término de la sucesión tal que $y_2 \in B(x_0, \frac{1}{n_2}) - \{x_0\}$. ∎

Usando la Proposición 7.1 se tiene un interesante método para probar que ciertos subconjuntos son compactos. Por ejemplo, la compacidad de los segmentos, de la circunferencia o de los espacios obtenidos mediante identificación topológica en un n-cubo (ver Ejemplo 7.18) se deducen de él.

Proposición 7.5 *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y $Z \subset X$ es compacto entonces $f(Z) \subset Y$ es compacto.*

Los subconjuntos compactos verifican ciertas propiedades que vamos a estudiar a continuación, y que serán de utilidad para analizar ejemplos concretos.

Respecto a la unión, cabe destacar lo siguiente.

Proposición 7.6 *La unión finita de subconjuntos compactos es un subconjunto compacto.*

Demostración:

Sea (X, T) un espacio topológico y $C_1, C_2, ..., C_n$ subconjuntos compactos de X. Si $\mathcal{R}$ es un recubrimiento abierto de $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ en X entonces es claro que $\mathcal{R}$ también un recubrimiento de C_i en X, para todo $1 \leq i \leq n$. Aplicando la compacidad de cada C_i, habrá subrecubrimientos finitos $\mathcal{S}_i$ de $\mathcal{R}$, para $1 \leq i \leq n$. Entonces $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{S}_i$ es subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$ que prueba la compacidad de $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$.

■

Ejemplo 7.21 La esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es un compacto, como se puede probar usando las Proposiciones 7.5 y 7.6, siguiendo un proceso similar al usado para demostrar su conexidad (Ejemplo 6.1.17).

Obsérvese que no toda unión de compactos es compacto, pues como todos los conjuntos unitarios lo son se llegaría a que cualquier espacio es compacto, lo cual sabemos que no es cierto. Tampoco la intersección de compactos es en general compacto, ni siquiera en el caso finito.

Ejemplo 7.22 En $\mathbb{R}$ se considera la topología de subconjuntos de $(0,1)$. Por el Ejemplo 7.13 sabemos que un subconjunto de $\mathbb{R}$ será compacto si y sólo si es finito o no está contenido en $(0,1)$. Por tanto $[0,1)$ y $(0,1]$ son subconjuntos compactos, pero $(0,1) = [0,1) \cap (0,1]$ no lo es.

Sin embargo, sí que se obtienen compactos de la siguiente manera.

Proposición 7.7 *La intersección de un subconjunto compacto con un cerrado es un subconjunto compacto.*

Demostración:

Sean $C, F \subset X$ con C compacto y F cerrado, y sea $\mathcal{R} = \{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $C \cap F$ en X.

Como $X - F$ es abierto, se deduce que $\{A_i\}_{i\in I} \cup \{X - F\}$ es un recubrimiento abierto de C en X. La compacidad de C permite extraer un subrecubrimiento finito, que puede ser de la forma $\{A_{i_k}\}_{k=1}^{n}$ o bien $\{A_{i_k}\}_{k=1}^{n} \cup \{X - F\}$. En ambos casos, como $(C \cap F) \cap (X - F) = \emptyset$, se deduce que $\mathcal{S} = \{A_{i_k}\}_{k=1}^{n}$ es el subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$ buscado.

■

Corolario 7.4 *Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Ejemplo 7.23 El subconjunto $A = \{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ de la recta real usual es compacto, al ser un cerrado contenido en el compacto $[0,1]$ (ver Ejemplo 7.17).

Ejemplo 7.24 El subespacio del plano usual

$$([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1])$$

que es la clausura del peine (ver ejemplo 7.19) es un compacto, al ser un cerrado contenido en el compacto $I \times I$ (ver Ejemplo 7.18).

El Corolario 7.4 no es generalizable a cualquier subconjunto. Es decir, la compacidad no es propiedad hereditaria.

Ejemplo 7.25 Ya hemos comprobado que, dado $Y \subsetneq X$, la topología de subconjuntos de Y hace a X un espacio compacto (Ejemplo 7.5). Sin embargo, si Y es infinito entonces no es un subconjunto compacto, pues $\mathcal{R} = \{\{y\}\}_{y \in Y}$ es un recubrimiento abierto de Y en X que no admite subrecubrimiento finito.

En los espacios de Hausdorff los compactos tienen la siguiente propiedad.

Proposición 7.8 *Los subconjuntos compactos de espacios de Hausdorff son cerrados.*

Demostración:

Sea (X, T) un espacio de Hausdorff y $C \subset X$ un subconjunto compacto. Veamos que $X - C$ es abierto, esto es, que es entorno de todos sus puntos.

Si $x \in X - C$, como X es T_2 y los entornos abiertos de un punto forman una base de entornos, para cada $c \in C$ existen $U_c \in Ent_T(x)$ y $V_c \in Ent_T(c)$ tales que $U_c \cap V_c = \emptyset$. Como C es compacto y $C \subset \bigcup\limits_{c \in C} V_c$, existen $c_1, c_2, ..., c_n \in C$ tales que $C \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{c_k}$. Considerando $U = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_{c_k}$ y $V = \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{c_k}$ se tiene que $U \in Ent_T(x)$ y $U \cap V = \emptyset$, de donde $x \in U \subset X - V \subset X - C$. ■

Esta Proposición 7.8 ayuda a probar el siguiente resultado, que tiene interesantes consecuencias.

Proposición 7.9 *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua, X es compacto e Y es de Hausdorff entonces f es cerrada.*

Demostración:

Si F es cerrado en X entonces, por el Corolario 7.4, es un subconjunto compacto de X. Como f es continua, de la Proposicición 7.5 se deduce que $f(F)$ es un subconjunto compacto de Y, y como Y es T_2 por la Proposición 7.8 se tiene que $f(F)$ es cerrado en Y. ■

Corolario 7.5 *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y sobre, X es compacto e Y es Hausdorff entonces f es identificación.*

Demostración:

Basta aplicar la Proposición 4.2.3 ■

Corolario 7.6 *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y biyectiva, X es compacto e Y es Hausdorff entonces f es homeomorfismo.*

Teniendo en cuenta que todo espacio métrico es de Hausdorff, la Proposición 7.8 garantiza que todo subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado. Pero en este caso, aún es posible afirmar más.

Proposición 7.10 *Todo subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado.*

Demostración:

Sea (X, d) un espacio métrico y $C \subset X$ un subconjunto compacto. Sólo resta ver que C está acotado. Fijado $x_0 \in X$, es claro que $C \subset \bigcup_{\varepsilon>0} B(x_0, \varepsilon) = X$. Como C es compacto entonces $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_0, \varepsilon_i) = B(x_0, \rho)$, donde $\rho = max\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}$. ■

Como caso particular de la Proposición 7.10 anterior se tiene que todo subconjunto compacto de la recta real usual es cerrado y acotado. Pero además los cerrados y acotados son los únicos subconjuntos compactos de $(\mathbb{R}, T_u)$.

Proposición 7.11 (Teorema de Heine-Borel) *Un subconjunto de la recta real usual es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración:

Como la Proposición 7.10 prueba ($\Rightarrow$), sólo resta demostrar la implicación hacia la izquierda.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ cerrado y acotado. Entonces existen $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $A \subset \bar{B}(x, \varepsilon) = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. Como A es cerrado, de la compacidad de $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ (ver Ejemplo 7.17) se deduce la compacidad de A, usando el Corolario 7.4. ■

Como consecuencia de la Proposición 7.2 y del Ejemplo 7.17, el producto de intervalos cerrados y acotados es un compacto en $\mathbb{R}^n$. Esto permite generalizar la demostración de la Proposición 7.11 para probar lo siguiente.

Corolario 7.7 *Un subconjunto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Ejemplo 7.26 La *n-esfera*

$$S^n = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

es un compacto. Evidentemente es acotado, pues está contenido en la bola cerrada de radio 1, y es cerrado como se puede observar sin más de pensar que S^n es la antimagen del conjunto $\{1\}$ por la aplicacion continua $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, x_2, ..., x_{n+1})) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$.

Otra consecuencia directa de la Proposición 7.11 es el resultado que ya adelantamos en el primer párrafo de este capítulo

Corolario 7.8 *Cualquier aplicación real con variable en un espacio compacto alcanza su mínimo y su máximo.*

Demostración:

Basta combinar las proposiciones 7.5 y 7.11, teniendo en cuenta que todo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ alcanza su máximo y su mínimo. ■

Apéndice A

Teoría de conjuntos

En este apéndice se van a introducir las nociones de teoría de conjuntos necesarias para el desarrollo de los capítulos precedentes. Salvo en el párrafo dedicado a cardinalidad, la mayoría de los resultados se enuncia sin demostración.

A.1. Conjuntos

El concepto de *conjunto* es primario y muy intuitivo, y por tanto se podría dar por supuesto que es de todos conocido. Sin embargo, es importante tener la noción exacta.

El gran matemático Cantor, creador de la teoría de conjuntos, dio la siguiente definición:

"*Un conjunto es la reunión en un todo de determinados objetos bien definidos y diferenciables unos de otros*".

Aunque realmente, para que el concepto de conjunto esté bien definido, es necesario añadir las siguientes exigencias:

1. *De cada objeto se puede decir, sin ninguna ambigüedad, si está o no en un determinado conjunto.*

2. *Todos los objetos de un conjunto son distintos.*

Los objetos de un conjunto se denominaran *elementos del conjunto*. Si un objeto x es elemento de un conjunto X se dirá que *x pertenece a X* (denotado $x \in X$). En caso contrario se dirá que *x no pertenece a X* ($x \notin X$).

Un conjunto se puede enunciar por *comprensión*, dando una propiedad que defina totalmente a los elementos del conjunto, o por *extensión*, enumerando entre llaves y separados por comas todos y cada uno de sus elementos.

Definición A.1.1 Diremos que un conjunto B es *subconjunto* de otro A, denotado por $B \subset A$, si todo elemento de B lo es también de A.

Cuando $B \subset A$ también se puede escribir $A \supset B$, y se puede decir que *B está contenido en A*, que *A contiene a B* o que A es *superconjunto* de B.

Definición A.1.2 Diremos que un conjunto A *es igual a* otro B (denotado $A = B$) cuando $A \subset B$ y $B \subset A$.

Definición A.1.3 Llamaremos *conjunto vacío*, denotado por $\emptyset$, al conjunto que no tiene ningún elemento.

Obsérvese que todo conjunto A contiene a $\emptyset$, puesto que $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ (al no haber elementos en $\emptyset$, ningún elemento contradice esta implicación).

Definición A.1.4 Dado $A \subset X$, *complementario de A en X* (denotado por $X - A$, y también por A^C o $\bar{A}$ si no hay lugar a confusión) al conjunto de los elementos de X que no pertenecen a A:

$$X - A = A^C = \bar{A} = \{x \in X \;/\; x \notin A\}$$

Esta notación se puede extender a cualquier par de conjuntos X, Y definiendo

$$X - Y = X - (X \cap Y)$$

Si $A, B \subset X$ se verifica que $A - B = (X - B) \cap A$.

Definición A.1.5 Dado un conjunto X, el conjunto de las *partes de* X (denotado por $\mathcal{P}(X)$) es el que tiene por elementos a todos los subconjuntos de X:

$$\mathcal{P}(X) = \{A \;/\; A \subset X\}$$

Una de las herramientas más potentes dentro de la teoría de los conjuntos es el llamado *axioma de elección*. En esencia, lo que afirma es lo siguiente:

Dada cualquier familia de conjuntos no vacíos, es posible "elegir" un elemento de cada conjunto.

Esto parece razonable, pero al poder ser aplicado a cualquier familia de conjuntos se torna muy general. De hecho, no se puede probar que siempre se pueda realizar una elección de este tipo, y ni siquiera es un axioma aceptado por todos los matemáticos.

En lo que a nosotros respecta, haremos uso de este axioma en algunas demostraciones, ya que existen muchos resultados que todavía no pueden ser probados sin usarlo. Para evitar remordimientos de conciencia, tendremos presente que Gödel, en el año 1938, probó que utilizar este axioma no nos llevará a contradicciones que no estén ya presentes sin su uso.

A.2. Operaciones entre conjuntos

Las principales operaciones que se pueden definir entre conjuntos son la *unión*, la *intersección* y el *producto cartesiano*. En esta sección las definiremos y se verán sus principales propiedades.

Definición A.2.1 Dados dos conjuntos A, B se define el *conjunto unión de* A *y* B (denotado $A \cup B$) como el formado por los elementos que están en A o en B.

$$A \cup B = \{x \;/\; x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

Definición A.2.2 Dados dos conjuntos A, B, se define el *conjunto intersección* de A y B (denotado $A \cap B$) como el formado por los elementos que están en A y en B.

$$A \cap B = \{x \ / \ x \in A \ y \ x \in B\}.$$

Si dos conjuntos no tienen elementos comunes, es decir, $A \cap B = \emptyset$, se dirá que son *disjuntos*.

Proposición A.2.1 *Sean $A, B, C \subset X$. Entonces:*

1. $\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}$ *(propiedades conmutativas)*

2. $\begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array}$ *(propiedades asociativas)*

3. $\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}$ *(propiedades distributivas)*

4. $\begin{array}{l} A \cup \emptyset = A \\ A \cap X = A \end{array}$ *(identidades)*

5. $\begin{array}{l} A \cup (X - A) = X \\ A \cap (X - A) = \emptyset \end{array}$ *(complementarios)*

Las anteriores propiedades se pueden considerar como las básicas de las operaciones entre subconjuntos de un conjunto, en el sentido de que las todas las demás se pueden deducir de ellas. A continuación señalamos otras propiedades interesantes. Es un buen ejercicio tratar de demostrarlas usando las cinco propiedades anteriores.

Corolario A.2.1 *Sean $A, B, C \subset X$. Entonces:*

a) $\begin{array}{l} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{array}$ *(idempotencias)*

b) $\begin{array}{l} A \cup X = X \\ A \cap \emptyset = \emptyset \end{array}$ *(maximalidad del total y minimalidad del vacío)*

c) $X - (X - A) = A$ *(involución)*

d) $\begin{array}{l} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{array}$ *(simplificación)*

e) $\begin{array}{l} X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B) \\ X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B) \end{array}$ *(leyes de Morgan).*

La unión e intersección pueden ser generalizadas a familias cualesquiera de conjuntos.

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos (todo elemento i perteneciente al conjunto I tiene asociado un conjunto A_i). Entonces:

- Se dirá que $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ cuando $x \in A_j$ para algún $j \in I$.
- Se dirá que $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ cuando $x \in A_i$ para todo $i \in I$.

Evidentemente $\bigcup_{i \in I} A_i$ y $\bigcap_{i \in I} A_i$ son conjuntos. Por definición de estas operaciones, son conmutativas y asociativas. Además:

Proposición A.2.2 *Para todo conjunto A se tiene que:*

1. $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap A = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap A)$.

   $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup A = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup A)$.

2. *Si existe $j \in I$ con $A \subset A_j$ entonces $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.*

   Si existe $j \in I$ con $A_j \subset A$ entonces $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A$.

3. $\bigcup_{i \in I} A_i \subset A \Leftrightarrow A_i \subset A$ *para todo* $i \in I$.

   $A \subset \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow A \subset A_i$ *para todo* $i \in I$.

4. *Si para todo $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $A_i \subset A_j$ entonces* $\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{j\in J} A_j$.

   Si para todo $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $A_i \subset A_j$ entonces $\bigcap_{i\in i} A_i \subset \bigcap_{j\in J} A_j$.

5. *Si* $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ *entonces* $X - (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(X - A_i)$ *y* $X - (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(X - A_i)$.

Unos conceptos derivados de la unión de conjuntos, y que son de gran utilidad para hablar de espacios topológicos compactos, son los de recubrimiento y subrecubrimiento.

Definición A.2.3 Un *recubrimiento* de un conjunto X es una colección $\mathcal{R} = \{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X verificando que $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. Se denomina *subrecubrimiento* de $\mathcal{R}$ a cualquier subcolección $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ que también sea recubrimiento de X.

Con la misma nomenclatura también se denomina un a noción ligeramente diferente.

Definición A.2.4 Si X es un conjunto e $Y \subset X$, se denomina un *recubrimiento de Y en X* a toda colección $\mathcal{R} = \{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X verificando que $Y \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. También aquí se denomina *subrecubrimiento* de $\mathcal{R}$ a cualquier subcolección $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ que sea recubrimiento de Y en X.

Un tipo particular de recubrimiento es el siguiente.

Definición A.2.5 Se denomina *partición de un conjunto X* a todo recubrimiento $\{A_i\}_{i\in I}$ de X verificando que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Otra operación interesante entre conjuntos es el producto cartesiano.

Definición A.2.6 El *producto cartesiano* de dos conjuntos X y Y (denotado $X \times Y$) es el conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente es un elemento de X y la segunda componente es un elemento de Y.

$$X \times Y = \{(x, y) \ / \ x \in X \ e \ y \in Y\}.$$

Como $(x, y) = (x', y')$ si y sólo si $x = x'$ e $y = y'$, se tiene que $X \times Y \neq Y \times X$, salvo que $X = Y$.

El concepto anterior se puede generalizar, y definir el producto cartesiano de n conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ como el conjunto

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \ / \ a_1 \in A_1, \ a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$$

La siguiente propiedad caracteriza el complementario de un producto cartesiano.

Proposición A.2.3 *Si $A \subset X$ y $B \subset Y$ entonces*

$$X \times Y - (A \times B) = ((X - A) \times Y) \cup (X \times (Y - B))$$

A.3. Aplicaciones

El objetivo de esta sección es dar una manera de relacionar conjuntos entre sí, y esto se logra gracias a las *aplicaciones*.

Definición A.3.1 Establecer una *aplicación* entre dos conjuntos X e Y es asignar, mediante una ley o por simple elección, a todo elemento de X uno y sólo un elemento de Y. La notación $f : X \to Y$ representará a una aplicación f entre los conjuntos X e Y. Se llamará *imagen de un elemento* $x \in X$ al elemento de Y asignado a x por la aplicación (denotado $y = f(x)$). Si $f : X \to Y$ es una aplicación, X se denominará *conjunto inicial* e Y *conjunto final* de f.

Las siguientes aplicaciones son muy usadas.

- *Aplicación identidad.*

  Para todo conjunto X se tiene la aplicación $1_X : X \to X$ definida por $1_X(x) = x$.

- *Aplicación inclusión.*

  Para todo $A \subset X$ se tiene la aplicación $i : A \to X$ definida por $i(a) = a$.

- *Aplicaciones constantes.*

  Para todo par de conjuntos X, Y e $y \in Y$ se tiene la aplicación constante en y $C_y : X \to Y$ definida por $C_y(x) = y$.

- *Aplicación característica.*

  Para todo $A \subset X$ se define la aplicación $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

- *Aplicación vacía.*

  Existe una única aplicación $\emptyset_X : \emptyset \to X$ desde el conjunto vacío en cualquier otro conjunto X. Como en vacío no hay elementos, no es necesario definir ley alguna que caracterice la aplicación.

  Obsérvese que si $X \neq \emptyset$ no existe ninguna aplicación $f : X \to \emptyset$.

Definición A.3.2 Si $f : X \to Y$ es una aplicación y $A \subset X$, llamaremos *conjunto imagen* de A (denotado $f(A)$) al siguiente subconjunto de Y:

$$f(A) = \{f(x) \;/\; x \in A\} = \{y \in Y \;/\; \textit{existe } x \in A \textit{ con } f(x) = y\}$$

Cuando $A = X$, el subconjunto $f(X) \subset Y$ se denominará *imagen de* f, y también se suele denotar por $Im\, f$.

Definición A.3.3 Si $f : X \to Y$ una aplicación y $B \subset Y$, llamaremos *imagen recíproca* de B, o bien *antimagen* de B (denotado por $f^{-1}(B)$), al siguiente subconjunto de X:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \;/\; f(x) \in B\}$$

Si se tiene una aplicación $f : X \to Y$ e $y \in Y$, se denotará $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ y se dirá que los elementos de $f^{-1}(y)$ son antimágenes de y.

Proposición A.3.1 Dada una aplicación $f : X \to Y$ se verifica:

a) $f^{-1}(Y) = X$.

b) $f(\emptyset) = \emptyset$ y $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

c) Si $A \subset X$ entonces $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Si $C \subset Y$ entonces $f(f^{-1})(C) \subset C$.

d) Si $A \subset B \subset X$ entonces $f(A) \subset f(B) \subset Y$.
Si $C \subset D \subset Y$ entonces $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D) \subset X$.

e) Si $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ entonces $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
Si $\{C_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(Y)$ entonces $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} C_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(C_i)$.

f) Si $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ entonces $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
Si $\{C_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(Y)$ entonces $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} C_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(C_i)$.

g) Si $C \subset Y$ entonces $f^{-1}(Y - C) = X - f^{-1}(C)$.

Obsérvese que si A y B son subconjuntos disjuntos de X e $y \in Y$, considerando la aplicación C_y constante en y se tiene que $C_y(A \cap B) = \emptyset \subsetneq C_y(A) \cap C_y(B) = \{y\} \cap \{y\} = \{y\}$. Por tanto en la segunda parte del apartado (f) no se da, en general, la igualdad.

Asimismo, si $Y \neq \{y\}$ entonces $C_y(X - A) = \{y\}$ e $Y - C_y(A) = Y - \{y\}$. Así, en general, no existe ninguna relación de inclusión entre complementarios e imágenes.

Sabemos a cada elemento del conjunto inicial le corresponde, mediante una aplicación, uno y sólo un elemento del conjunto final. No obstante no se sabe en principio si todos los elementos del conjunto final son imagen de alguno del inicial, o si hay algún elemento del conjunto final que es imagen de varios elementos del inicial. Así, surgen nuevas definiciones.

Definición A.3.4 Una aplicación $f : X \to Y$ se dirá

- *inyectiva* si $f(x) = f(x')$ implica $x = x'$.
- *suprayectiva* (o simplemente *sobre*) si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
- *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva.

Teorema A.3.1 Una aplicación $f : X \to Y$ es biyectiva si y sólo si $g : Y \to X$, definida por $g(y) = x$ si $f(x) = y$, es una aplicación biyectiva.

La aplicación g anterior será denominada *aplicación inversa de f*, y se denotará f^{-1}.

Proposición A.3.2 Dada una aplicación $f : X \to Y$, una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X, $A \subset X$ y $B \subset Y$.

a) Si f es inyectiva entonces $A = f^{-1}(f(A))$.

b) Si f es sobre entonces $f(f^{-1}(B)) = B$.

c) Si f es inyectiva entonces $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

d) Si f es inyectiva entonces $f(X - A) \subset Y - f(A)$.

e) Si f es sobre entonces $Y - f(A) \subset f(X - A)$.

f) Si f es biyectiva entonces $f(X - A) = Y - f(A)$.

Definición A.3.5 Se denominará *composición de dos aplicacciones* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ a la aplicación $g \circ f : X \to Z$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

La composición de dos aplicaciones $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ también se denotará simplemente por gf.

Proposición A.3.3 *Dadas aplicaciones* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} K$*:*

a) $f1_X = 1_Y f = f$.

b) $(hg)f = h(gf)$ *(asociatividad de la composición).*

c) $(gf)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$, *para todo* $C \subset Z$.

d) Si f *es biyectiva entonces* $ff^{-1} = 1_Y$ *y* $f^{-1}f = 1_X$.

e) Si f *y* g *son inyectivas entonces* gf *es inyectiva.*

f) Si f *y* g *son sobreyectivas entonces* gf *es sobreyectiva.*

g) Si f *y* g *son biyectivas entonces* gf *es biyectiva.*

h) Si f *y* g *son biyectivas entonces* $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

i) Si gf *es biyectiva entonces* f *es inyectiva y* g *es sobre.*

A.4. Relaciones de equivalencia

Toda *relación* R entre los elementos de un conjunto X está determinada por un subconjunto $\mathcal{G} \subset X \times X$, en el sentido de que x está relacionado con y si y sólo si $(x, y) \in \mathcal{G}$. En general xRy denota que un elemento x está relacionado con otro y, y el subconjunto $\mathcal{G} \subset X \times X$ se denomina *grafo de la relación.*

Son particularmente interesantes en topología las denominadas *relaciones de equivalencia*, que son aquellas que verifican tres propiedades concretas.

Definición A.4.1 Una relación en un conjunto X se dirá *de equivalencia* cuando verifique las siguientes propiedades:

- *Reflexiva:* Todo elemento está relacionado consigo mismo.
- *Simétrica:* Si un elemento x está relacionado con otro y entonces y está relacionado con x.
- *Transitiva:* Si un elemento x está relacionado con otro y e y está relacionado con un tercero z, entonces x está relacionado con z.

Las relaciones de equivalencia sobre un conjunto dado permiten construir unos nuevos conjuntos de gran interés: los *conjuntos cociente*. Para ello en necesario definir un concepto previo.

Definición A.4.2 Si R es una relación de equivalencia en un conjunto X y $x \in X$, el subconjunto

$$[x] = \{y \in X \ / \ xRy\} \subset X$$

se denominará *clase de equivalencia de x*. El conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de los puntos de X se denominará *conjunto cociente de X por R,* y se denotará por X/R.

Un elemento cualquiera de una clase de equivalencia será denominado *representante* de la misma.

Por la propiedad reflexiva, todo punto $x \in X$ pertenece a $[x]$. Además, si $z \in [x] \cap [y]$ entonces, aplicando las propiedades simétrica y transitiva, se tiene que $[x] = [y]$. En consecuencia:

Proposición A.4.1 Si R es una relación de equivalencia en un conjunto X, el conjunto cociente X/R es una partición de X.

Ejemplo A.4.1 Consideremos la relación de equivalencia que dado un subconjunto A de un conjunto cualquiera X se define por xRy si y sólo si $x = y$ ó $x, y \in A$. En este caso $[x] = \{x\}$ cuando $x \notin A$ y $[x] = A$ cuando $x \in A$. Así, X/R se puede interpretar como un conjunto que se obtiene a partir de X colapsando A en un punto.

Toda relación de equivalencia tiene asociada canónicamente una aplicación.

Definición A.4.3 Dada una relación de equivalencia R en un conjunto X, se denomina *proyección en el cociente* a la aplicación $\pi : X \to X/R$ definida por $\pi(x) = [x]$.

Por la propiedad reflexiva, es claro que las proyecciones en el cociente son aplicaciones sobreyectivas.

A.5. Cardinalidad

Intuitivamente, una propiedad básica de todo conjunto es el número de elementos que tiene. Sin embargo, la formalización de este concepto no es tan inmediata como parece.

Definición A.5.1 Diremos que dos conjuntos X e Y son *equipotentes* si existe una aplicación biyectiva entre ambos.

Es fácil comprobar que la equipotencia de conjuntos verifica las propiedades de una relación de equivalencia. Esto permite introducir el siguiente concepto.

Definición A.5.2 Se denomina *cardinal de un conjunto X* a su clase de equivalencia por la relación de equipotencia, esto es

$$Card(X) = \{Y \ / \ X \ e \ Y \ son \ equipotentes\}$$

Como consecuencia de la anterior definición, dos conjuntos X e Y son equipotentes si y sólo si $Card(X) = Card(Y)$.

Es conveniente fijar notación y nomenclatura para una serie de conjuntos distinguidos que pueden servir como referencia.

- Un conjunto X se dirá *finito* si es vacío o existe un número natural n con $Card(X) = Card(\{1, 2, ..., n\})$. Esto se denotará $Card(X) = 0$ ó $Card(X) = n$, respectivamente.

- Un conjunto X se dirá *infinito* si no es finito.

- El cardinal de los números naturales se denotará por χ_0.

- Un conjunto X se dirá *numerable* si $Card(X) = \chi_0$.

- Un conjunto X se dirá *contable* si es finito o numerable.

- El cardinal de los números reales denominará *cardinal del continuo* y se denotará por C.

- Se dirá que X tiene el cardinal del continuo si $Card(X) = C$.

Proposición A.5.1

a) Cualquier intervalo abierto tiene el cardinal del continuo.

b) Todo subconjunto infinito de los números naturales es numerable.

c) Si existe una aplicación inyectiva desde un conjunto X en un conjunto numerable entonces X es contable.

d) La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

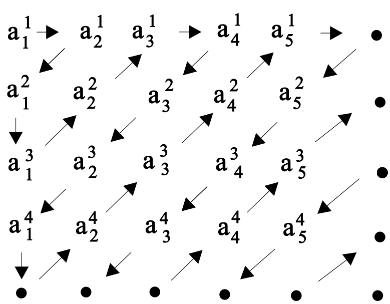
Demostración:

(a) La aplicación $f = tag_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, restricción de la aplicación tangente, es una biyección con inversa definida por $f^{-1}(x) = arctag\ x$. Además, si $a < b$ y $c < d$, la aplicación $g : (a, b) \to (c, d)$ definida por $g(t) = c + \frac{(d-c)(t-a)}{b-a}$ es también biyectiva, con inversa definida por $g^{-1}(t) = a + \frac{(b-a)(t-c)}{d-c}$.

(b) Sea $A \subset \mathbb{N}$ infinito. Definimos $\phi : \mathbb{N} \to A$ inductivamente por $\phi(1) =$ mínimo de A y $\phi(n) =$ mínimo de A_n, donde $A_n = A - \phi(\{1, ..., n-1\})$, para $n \geq 2$. Claramente ϕ es biyectiva.

(c) Es posible generalizar la demostración del apartado anterior.

(d) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos numerables. Entonces todo A_n puede expresarse como $A_n = \{a_1^n, a_2^n, ...\}$. La siguiente figura da la idea de cómo construir una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, siguiendo el orden indicado por las flechas y evitando los elementos repetidos.



■

Corolario A.5.1

a) *Todo producto cartesiano finito de conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

b) *El conjunto de los números racionales es numerable.*

Es posible definir diversas operaciones entre cardinales, que generalizan las respectivas entre números enteros no negativos (cardinales finitos). En primer lugar introduciremos la suma de cardinales.

Definición A.5.3 *Dada una familia de conjuntos* $\{A_i\}_{i\in I}$*, se define*

$$\sum_{i\in I} Card(A_i) = Card(\bigsqcup_{i\in I} A_i)$$

donde $\bigsqcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$ *(unión disjunta).*

A continuación, el producto finito de cardinales.

Definición A.5.4 Dados conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$, se define

$$Card(A_1).Card(A_2)...Card(A_n) = Card(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n)$$

Y por último la exponenciación.

Definición A.5.5 *Dados dos conjuntos* A, B*, se define*

$$Card(B)^{Card(A)} = Card(B^A)$$

donde $B^A = \{\alpha : A \to B \ / \ \alpha \text{ es aplicación}\}$.

La siguiente relación entre cardinales será de gran utilidad.

Proposición A.5.2 $Card(\mathcal{P}(X)) = 2^{card(X)}$ para todo conjunto X.

Demostración:

Es fácil probar que $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ definida por $\alpha(A) = \chi_A : X \to \{0,1\}$, aplicación característica, es una biyección. ■

Definición A.5.6 Diremos que *el cardinal de un conjunto* X *es menor o igual que el cardinal de otro* Y, denotado $Card(X) \leq Card(Y)$ cuando exista una aplicación inyectiva $f : X \to Y$. Diremos que *el cardinal de* X *es menor estrictamente que el cardinal de* Y, denotado $Card(X) < Card(Y)$, cuando $Card(X) \leq Card(Y)$ y $Card(X) \neq Card(Y)$.

Veamos una caracterización de la anterior definición. Obsérvese que en su demostración se hace uso del axioma de elección.

Proposición A.5.3 Dados dos conjuntos no vacíos A y B, $Card(A) \leq Card(B)$ si y sólo si existe una aplicación suprayectiva $\beta : B \to A$

Demostración:

Si $\alpha : A \to B$ es una aplicación inyectiva, existente porque $Card(A) \leq Card(B)$, fijando un punto cualquiera $a_0 \in A$ se puede definir una aplicación sobre $\beta : B \to A$ por

$$\beta(b) = \begin{cases} \alpha^{-1}(b), & si\ \alpha^{-1}(b) \neq \emptyset \\ a_0, & si\ \alpha^{-1}(b) = \emptyset \end{cases}$$

Recíprocamente, si $\beta : B \to A$ es sobre entonces $\beta^{-1}(a) \neq \emptyset$ para todo $a \in A$. Así, es posible definir una aplicación inyectiva $\alpha : A \to B$ tomando $\alpha(a) \in \beta^{-1}(a)$. ∎

Usando de nuevo el axioma de elección es fácil probar lo siguiente.

Proposición A.5.4 Si X es un conjunto infinito entonces $\chi_0 \leq Card(X)$.

Otra propiedad interesante:

Proposición A.5.5 (Teorema de Cantor) *Para todo conjunto* X *se verifica que* $Card(X) < Card(\mathcal{P}(X))$.

Demostración:

Evidentemente, $f : X \to \mathcal{P}(X)$ definida por $f(x) = \{x\}$ es una aplicación inyectiva. Por tanto $Card(X) \leq Card(\mathcal{P}(X))$.

Supongamos ahora que existe una aplicación biyectiva $g : \mathcal{P}(X) \to X$. Para todo $x \in X$ ocurrirá que $g^{-1}(x) = \{B_x\} \subset \mathcal{P}(X)$. Considerando el subconjunto $A = \{x \in X \ / \ g^{-1}(x) = \emptyset \ \vee \ x \notin B_x \ \} \subset X$, entonces $g(A) \in A \Leftrightarrow g(A) \notin A$, lo cual es absurdo. ■

El siguiente resultado es muy útil a la hora de probar igualdades entre cardinales.

Proposición A.5.6 (Teorema de Cantor-Berstein) *Si $Card(X) \leq Card(Y)$ y $Card(Y) \leq Card(X)$ entonces $Card(X) = Card(Y)$.*

Demostración:

Como existen aplicaciones inyectivas $h : X \to Y$ y $g : Y \to X$, llamando $B = h(X) \subset Y$ y $A = g(Y) \subset X$ podemos considerar $h : X \to B$ y $g : Y \to A$, aplicaciones biyectivas.

Sea $f = i_A \, g \, i_B \, h : X \to X$, donde $i_A : A \to X$ e $i_B : B \to Y$ son las inclusiones. Claramente f es inyectiva, y permite conseguir una biyección $\phi : X \to A$, que garantiza que $Card(X) = Card(A) = Card(Y)$.

Tomamos $C = A - f(X)$ y definimos el conjunto $S = C \cup (\bigcup_{n \geq 1} f^n(C))$, donde f^n denota la composición de f consigo misma n veces. Claramente, $S = C \cup f(S)$. Ahora se define

$$\phi(x) = \begin{cases} x & , \ si \ x \in S \\ f(x) & , \ si \ x \in X - S \end{cases}$$

Tenemos que $\phi(S) = S$. Por tanto ϕ es sobre, como demuestran las siguientes igualdades:

$$\phi(X) = \phi(S) \cup \phi(X - S) = S \cup f(X - S) = C \cup f(S) \cup f(X - S) = A$$

Finalmente, probemos que ϕ es inyectiva. Puesto que $\phi_{|S}$ y $\phi_{|X-S}$ son inyectivas por definición, basta probar que $\phi(S) = S$ y $\phi(X - S) = f(X - S)$ son disjuntos. Si existiese $x \in S = C \cup f(S)$ tal que $x = f(x')$, con $x' \in X - S$, entonces $x \in C$, puesto que f es inyectiva. Por tanto $x \notin f(X)$, lo cual contradice que $x = f(x')$. ■

Así, podemos probar:

Proposición A.5.7 *$Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = C$.*

Demostración:

Por el apartado (a) de la Proposición A.5.1, es suficiente probar que $Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = Card((0,1))$.

- $Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \leq Card((0,1))$:

  Definimos la aplicación $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ como sigue. Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ se puede ordenar de menor a mayor, esto es, se puede expresar como $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$ si es infinito, o como $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ si es finito. Además todo número natural, en particular los a_i, se puede expresar en base dos de forma única como una lista ordenada y finita de ceros y unos. Usando lo anterior definimos

  $$f(A) = \begin{cases} 0'a_1 2 a_2 2..a_n 2 a_{n+1} 2... & , si\ A\ es\ infinito \\ 0'a_1 2 a_2 2 a_3 2...a_n 222... & , si\ A\ es\ finito \end{cases}$$

  donde a_i representan los elementos de A, ordenados y expresados en base dos.

  Evidentemente, f es una aplicación inyectiva.

- $Card((0,1)) \leq Card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$:

  La aplicación $g : (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se define por $g(0'a_1a_2a_3...) = \{1a_1, 2a_2, 3a_3, ...\}$, donde todos los elementos de $(0,1)$ se consideran con infinitos decimales, aunque sean ceros por la derecha.

  Sabemos que existen las siguientes igualdades entre números reales:

  $$a_1, a_2a_3...a_{n-1}a_n = a_1, a_2a_3...(a_{n-1} - 1)99999...$$

  A pesar de ello, podemos suponer cada número real con una expresión fija, y por tanto g es aplicación. Además, por cómo ha sido construida, es claro que g es inyectiva.

■

Como consecuencia inmediata de las Proposiciones A.5.5 y A.5.7 se tiene el siguiente resultado.

Corolario A.5.2 *El cardinal del conjunto de los números naturales es menor estrictamente que el cardinal del conjunto de los números reales, esto es,* $\chi_0 < C$.

Otra propiedad interesante es:

Proposición A.5.8 *Si* A *es un conjunto infinito y* B *es un conjunto contable entonces* $Card(A) + Card(B) = Card(A)$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad se puede suponer $B = \{b_1, b_2, ..., b_m, ...\}$ y $B \cap A = \emptyset$.

Evidentemente $Card(A) \leq Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.

Por ser A infinito existe una aplicación inyectiva $\alpha : \mathbb{N} \to A$. Si denominamos $\alpha(n) = a_n \in A$, se define la aplicación inyectiva $\beta : A \cup B \to A$ por

$$\beta(x) = \begin{cases} x, & si\ x\ \in A - \alpha(\mathbb{N}) \\ a_{2n-1}, & si\ x = a_n \in \alpha(\mathbb{N}) \\ a_{2i}, & si\ x = b_i \in B \end{cases}$$

■

Dado un conjunto X, el subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ formado por todos los subconjuntos finitos de X se denominará *conjunto de partes finitas de* X. Esto es:

$$\mathcal{P}_F(X) = \{A \subset X \ / \ A\ finito\}$$

Análogamente se puede construir el *conjunto de partes infinitas de* X:

$$\mathcal{P}_I(X) = \{A \subset X \ / \ A\ infinito\}$$

Proposición A.5.9 *El conjunto de las partes finitas de un conjunto numerable es numerable. El conjunto de las partes infinitas de un conjunto numerable no es contable.*

Demostración:

Consideremos, sin pérdida de generalidad, $\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ y $\mathcal{P}_I(\mathbb{N})$

Sea $\mathcal{A}_n$ el subconjunto de $\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ formado por los subconjuntos de $\mathbb{N}$ cuyo cardinal es $n \in \mathbb{N}$. La aplicación $f : \mathcal{A}_n \to \mathbb{N} \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{N}$ definida por

$f(\{a_1, a_2, ..., a_n\}) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ es inyectiva (considerando el conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ordenado de forma creciente). Así, por el apartado (a) del Corolario A.5.1 y el apartado (c) de la Proposición A.5.1, se tiene que $\mathcal{A}_n$ es numerable. Por el apartado (d) de la Proposición A.5.1 se concluye que $\mathcal{P}_F(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n \cup \{\emptyset\}$ es un conjunto numerable.

Finalmente, $\mathcal{P}_I(\mathbb{N})$ no puede ser contable pues si lo fuese entonces $2^{\chi_0} = Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = Card(\mathcal{P}_F(\mathbb{N})) + Card(\mathcal{P}_I(\mathbb{N})) = \chi_0$, lo cual contradice la Proposición A.5.5. ∎

Proposición A.5.10 $Card(\mathcal{P}_I(\mathbb{N})) = 2^{\chi_0}$.

Demostración:

Evidentemente $\mathcal{P}_I(\mathbb{N}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y por tanto $Card(\mathcal{P}_I(\mathbb{N})) \leq 2^{\chi_0}$.

Si $\alpha : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, se define $h(\alpha) = \{1\alpha(1), 2\alpha(2), ..., n\alpha(n), ...\} \subset \mathbb{N}$. Esto da lugar a una aplicación inyectiva $h : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_I(\mathbb{N})$, luego $2^{\mu} \leq Card(\mathcal{P}_I(\mathbb{N}))$. ∎

Destaquemos por último una cuestión acerca de cardinalidad que aún se mantiene abierta. Esta es la *el problema de la hipótesis del continuo.*

La hipótesis del continuo de Cantor postula que el cardinal del continuo es el menor cardinal no numerable. En 1940 Gödel demostró que esta hipótesis es consistente en la teoría de conjuntos, es decir, con las propiedades actualmente atribuidas a los conjuntos es imposible probar que es falsa. Sin embargo, en 1963 Cohen probó que la negación de la hipótesis del continuo también es consistente en la teoría de conjuntos, o lo que es lo mismo, que es imposible probar que el cardinal del continuo es el menor cardinal no numerable.

Como hemos visto, a pesar de que el problema del infinito ha sido protagonista de grandes revoluciones en la historia de las matemáticas, todavía representa algo indefinido y ambiguo que provoca un cierto sentimiento de desesperación. En lo que a nosotros respecta, como hemos dicho que es imposible probar la existencia de un conjunto no numerable cuyo cardinal no sea mayor o igual que C, supondremos que la hipótesis del continuo es cierta.

Apéndice B

Espacios métricos

Desde el comienzo de este curso se hace patente la gran relación existente entre el concepto de espacio topológico y el de proximidad. Pero la noción matemática que permite establecer rigurosamente lo próximos que se encuentran los elementos de un conjuntos es la *distancia*.

Definición B.1 Una *distancia (o métrica)* sobre un conjunto X es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ verificando las propiedades:

D1. $d(x, y) \geq 0$, para todos $x, y \in X$.

D2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

D3. $d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in X$.

D4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todos $x, y, z \in X$ (*Desigualdad triangular*).

Un conjunto X sobre el cual hay definida un distancia d se denomina *espacio métrico*, y se denota por (X, d).

Ejemplo B.1 La distancia más comúnmente usada en $\mathbb{R}$ es la definida usando el valor absoluto por $d(x, y) = |x - y|$, que se denomina *distancia usual* o *euclídea.* Pero hay una infinidad de distancias distintas, como pueden ser la dada por $d(x, y) = (x - y)^2$, o la distancia trivial d_t :

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $d_t(x,y) = \begin{cases} 0, & si\ x = y \\ 1, & si\ x \neq y \end{cases}$. Nótese que la distancia trivial puede ser definida de forma análoga para un conjunto cualquiera.

Ejemplo B.2 La distancia euclídea usual se generaliza a $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$d((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

Otras métricas en $\mathbb{R}^n$ son la *distancia taxi*, así llamada porque en el caso particular del plano es la que debe emplear un taxista para medir la distancia entre dos puntos de su trayecto, suponiendo que la ciudad en la que trabaje tenga sus calles en dos sistemas perpendiculares de rectas paralelas:

$$d((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$$

o la *distancia max*, definida utilizando un máximo de números reales:

$$d((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = máx\{|x_i - y_i|\}_{1\leq i\leq n}$$

Ejemplo B.3 En el conjunto de los números naturales se puede definir $d(n,m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$, entre otras.

Para considerar los puntos que rodean a otro, es decir, los que están "suficientemente cerca", son fundamentales los conjuntos denominados *bolas*.

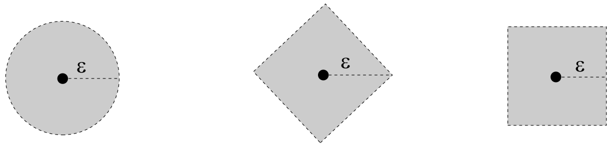
Definición B.2 Dado un punto x de un espacio métrico y un número real $\varepsilon > 0$, se define la *bola abierta de centro x y radio ε* por:

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X \ / \ d(x,y) < \varepsilon\}$$

Análogamente, la *bola cerrada de centro x y radio ε* se define por:

$$\overline{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X \ / \ d(x,y) \leq \varepsilon\}$$

La siguiente figura nos muestra cuáles son las bolas abiertas en tres de las métricas que hemos definido en el plano:



Bola euclídea de radio ε | Bola "taxi" de radio ε | Bola "max" de radio ε

La anterior definición permite introducir de manera sencilla el concepto de subconjunto acotado de un espacio métrico.

Definición B.3 Un subconjunto de un espacio métrico se dirá *acotado* cuando está contenido en alguna bola.

Otros conceptos interesantes son el de distancia desde un punto a un subconjunto y distancia entre subconjuntos de un espacio métrico.

Definición B.4 Sea (X, d) es un espacio métrico, $x \in X$ y $A, B \subset X$. se define la *distancia del punto x al subconjunto A* como el siguiente ínfimo de números reales:

$$d(x, A) = inf\ \{d(x, y)\ /\ y \in A\}$$

Más generalmente, se define la *distancia entre los subconjuntos A y B* por

$$d(A, B) = inf\ \{d(x, y)\ /\ x \in A,\ y \in B\}$$

Proposición B.1 *Si (X, d) es un espacio métrico, $x, y \in X$ y $A \subset X$ entonces $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$.*

Demostración:

Para todo $a \in A$ se verifica que $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Así

$$\begin{aligned} d(x, A) &= inf\ \{d(x, a)\ /\ a \in A\} \leq inf\ \{d(x, y) + d(y, a)\ /\ a \in A\} = \\ &= d(x, y) + inf\ \{d(y, a)\ /\ a \in A\} = d(x, y) + d(y, A) \end{aligned}$$

■

Bibliografía

[1] M.A. Armstrong. *Basic Topology*. Springer, 1983. Traducción española: Topología Básica. Reverté, 1987.

[2] R. Ayala, E. Domínguez y A. Quintero. *Elementos de la Topología general*. Addison-Wesley. Madrid, 1997.

[3] E. Bujalance, J. Tarrés. *Problemas de Topología*. UNED, 1985.

[4] F. Chamizo. *La topología de 2 no es tan difícil*. *http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/*

[5] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, 1966.

[6] G. Fleitas y J. Margalef. *Problemas de Topología general*. Alhambra. Madrid, 1980.

[7] J.L. Kelley. *General Topology*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] S. Lipschutz. *Topología general*. Serie Schaum, McGraw-Hill. México, 1970.

[9] J.R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs N.J., 1975.

[10] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading Mass, 1970.

Índice alfabético