Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología.
Universidad de Málaga.

Ejercicios de Álgebra Clásica

Relación 23.
Ecuaciones sencillas insolubles.

1 de junio de 2014.

Profesor de la asignatura:
José Antonio Cuenca Mira.

23. Ecuaciones sencillas insolubles

23.1 Sea ε una raíz octava primitiva de la unidad. Mostrar que $\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}$ es un ejemplo de una extensión de Galois de grado 4 que no contiene ningún 4-ciclo.

23.2 Mostrar que para todo entero $n \geq 5$ existe siempre algún polinomio $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tal que la ecuación $f(x) = 0$ no es soluble por radicales.

23.3 Sea p un primo mayor que 11. Demostrar que $f(X) = X^5 - pX + p$ es un polinomio de $\mathbb{Q}[X]$ tal que la ecuación $f(x) = 0$ es soluble por radicales.

23.4 (Kronecker). Sea $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irreducible de grado primo e impar p. Mostrar que si $f(x) = 0$ es soluble por radicales entonces el número de raíces reales de $f(X)$ es 1 ó p. [Indicación. Utilizar el ejercicio 0. 10].

23.5 ¿Puede utilizarse el ejercicio 23. 4 para demostrar la proposición 2.13.3?

23.6 Sean f y p como en el ejecicio 23. 4. Suponer además que $p \equiv 3 (\text{mód}\, 4)$. Mostrar que las raíces reales de f son 1 ó p dependiendo de que su discriminante sea negativo o positivo.

23.7 Demostrar que para N suficientemente grande, y p un primo positivo dado, la ecuación polinómica correspondiente al polinomio

$$f(X) = X(X - Np^2)(X + Np^2)(X^2 + N^2p^4) + p$$

no puede resolverse por radicales.

23.8 (R. Brauer). Sea k un impar estictamente mayor que 3, m un par positivo y $n_1 < \cdots < n_{k-2}$ una sucesión estrictamente creciente de $k - 2$ números pares. Sean

$$g(X) = (X^2 - m)(X - n_1)(X - n_2) \cdots (X - n_{k-2}), \qquad f(X) = g(X) - 2.$$

Mostrar que la función polinómica $x \mapsto g(x)$ tiene $(k - 3)/2$ máximos relativos en $[n_1, n_{k-2}]$ cuyos valores son todos mayores que 2. Demostrar que $f(X)$ tiene $(k - 3)$ raíces reales en $[n_1, n_{k-2}]$. Considerando los coeficientes de los término de f de grados $k - 1$ y $k - 2$, comprobar que f tiene exactamente $k - 2$ raíces reales, en el caso en que se elija m suficientemente grande. Demostrar, que si además k es un primo p, entonces el grupo de Galois de f es S_p.