Convocatoria Ordinaria de junio. **Miércoles 21 de junio de 2006.**

Examen de Álgebra Homológica

Teoría

1-. Sea R un anillo unitario, M un R-módulo por la derecha sobre R y N un R-módulo por la izquierda sobre R.

(i) Define el producto tensorial $M \otimes N$. **1**

(ii) Construye el funtor $M \otimes - :$ R-Mod $\to$ Ab y demuestra que es un funtor exacto por un lado. **1**

(iii) Pon un ejemplo que demuestre que no es exacto. **1**

2-. (i) Define lo que es una traslación homotópica. **1**

(ii) Sean $\mathcal{M} = \{M_i\}$ y $\mathcal{N} = \{N_i\}$ dos complejos de cadena y $f, g : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ dos morfismos de complejos homotópicos. Demuestra que $H(f) = H(g)$ para todo i. **1**

(iii) Sea $\mathcal{F} : R - Mod \to Ab$ un funtor aditivo. Demuestra que la aplicación objeto del funtor derivado (para resoluciones inyectivas) de $\mathcal{F}$ está bien definida. **1**

3-. Define objeto inicial en una categoría y demuestra que es único salvo isomorfismo. Puede tener un objeto la propiedad de ser objeto inicial y objeto final? **0.5**

4-. Demuestra que si I es un R-modulo inyectivo, entonces la sucesión exacta corta $0 \to I \to M \to P \to 0$ es escindida. **0.5**

¿En que lugar de la teoría es importante este hecho? ¿Por qué? **1**

5-. Haz una construcción esquemática del funtor derivado. Enunciando los resultados más relevantes. **2**

Nota: En la parte de teoría no se podrán usar los apuntes. Se deben elegir ejercicios (o apartados de estos) para que la puntuación máxima del examen, teoría y problemas, sea de 10.

Problemas

6-. En el siguiente diagrama conmutativo las filas son exactas y el módulo I es inyectivo. Demuestra que existe un homomorfismo de módulos $f : M \to I$ que sigue haciendo el diagrama conmutativo: **3**

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "g_1"] & P \arrow[r, "g_2"] & I \\
N' \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "h_1"'] & P' \arrow[u, "f_2"] \arrow[r, "h_2"'] & M
\end{tikzcd}$$

7-. Escribe el resultado dual del ejercicio anterior. **1**

8-. Sea, R_1, R_2, R_3, R_4 cuatro anillos unitarios, M un (R_1, R_2) bimódulo, N un (R_2, R_3) bimódulo y P un (R_1, R_3) bimódulo. Entonces **3**

$$\mathrm{Hom}_{R_1}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{hom}_{R_1}(M, \mathrm{Hom}_{R_3}(N, P)).$$

9-. Como se relacionan las resoluciones inyectivas y las sucesiones exactas cortas. Explica que resultados hay y para que sirven. **3**

Nota: En la parte de teoría no se podrán usar los apuntes. Se deben elegir ejercicios (o apartados de estos) para que la puntuación máxima del examen, teoría y problemas, sea de 10.

Convocatoria Ordinaria. **Martes 19 de septiembre de 2006.**

Examen de Álgebra Homológica

1-. Sea R un anillo unitario y M un R-módulo por la izquierda sobre R.

(i) Define funtor exacto (exacto izquierda, exacto derecha) y todas las nociones que aparezcan involucradas. **1**

(ii) Construye el funtor (contravariante) $\hom_R(-, M)$ y demuestra que es exacto por un lado. **1**

(iii) Pon un ejemplo que demuestre que no es exacto. **1**

2-. Define sucesión exacta corta escindida y pon un ejemplo de una S.E.C no escindida. **1**

(ii) Demuestra que si $0 \to N \to M \to P \to 0$ es una sucesión exacta corta escindida de R-módulos por la izquierda y Q es un R-módulo por la derecha, entonces

$$0 \to Q \otimes N \to Q \otimes M \to Q \otimes P \to 0$$

es escindida. **1**

3-. Sea M un R-módulo. Construye una resolución proyectiva sobre M. **2**

4-. El funtor de Homología. **3**

Problemas

5-. En el siguiente diagrama conmutativo las filas son exactas y el módulo I es inyectivo. Demuestra que existe un homomorfismo de módulos $f : M \to I$ que sigue haciendo el diagrama conmutativo: **3**

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "g_1"] & P \arrow[r, "g_2"] & I \\
N' \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "h_1"'] & P' \arrow[u, "f_2"] \arrow[r, "h_2"'] & M
\end{tikzcd}$$

6-. Sea, R_1, R_2, R_3, R_4 cuatro anillos unitarios, M un (R_1, R_2) bimódulo, N un (R_2, R_3) bimódulo y P un (R_1, R_3) bimódulo. Entonces **3**

$$\mathrm{Hom}_{R_1}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{hom}_{R_1}(M, \mathrm{Hom}_{R_3}(N, P)).$$

7-. Como se relacionan las resoluciones proyectivas y las sucesiones exactas cortas. Explica que resultados hay y para que sirven. **3**

8-. Sabes dar un módulo proyectivo que no sea libre? **1**

Nota: En la parte de teoría no se podrán usar los apuntes. Se deben elegir ejercicios (o apartados de estos) para que la puntuación máxima del examen, teoría y problemas, sea de 10.