

Examen de Álgebra Homológica

Teoría

1-. Sea R un anillo unitario, M un R -módulo por la derecha sobre R y N un R -módulo por la izquierda sobre R .

- (i) Define el producto tensorial $M \otimes N$. **1**
- (ii) Construye el functor $M \otimes - : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ y demuestra que es un functor exacto por un lado. **1**
- (iii) Pon un ejemplo que demuestre que no es exacto. **1**

2-. (i) Define lo que es una traslación homotópica. **1**

- (ii) Sean $\mathcal{M} = \{M_i\}$ y $\mathcal{N} = \{N_i\}$ dos complejos de cadena y $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ dos morfismos de complejos homotópicos. Demuestra que $H(f) = H(g)$ para todo i . **1**
- (iii) Sea $\mathcal{F} : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ un functor aditivo. Demuestra que la aplicación objeto del functor derivado (para resoluciones inyectivas) de \mathcal{F} está bien definida. **1**

3-. Define objeto inicial en una categoría y demuestra que es único salvo isomorfismo. Puede tener un objeto la propiedad de ser objeto inicial y objeto final? **0.5**

4-. Demuestra que si I es un R -módulo inyectivo, entonces la sucesión exacta corta $0 \rightarrow I \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ es escindida. **0.5**

¿En que lugar de la teoría es importante este hecho? ¿Por qué? **1**

5-. Haz una construcción esquemática del functor derivado. Enunciando los resultados más relevantes. **2**

Nota: En la parte de teoría no se podrán usar los apuntes. Se deben elegir ejercicios (o apartados de estos) para que la puntuación máxima del examen, teoría y problemas, sea de 10.

Problemas

6- En el siguiente diagrama conmutativo las filas son exactas y el módulo I es inyectivo. Demuestra que existe un homomorfismo de módulos $f : M \rightarrow I$ que sigue haciendo el diagrama conmutativo: **3**

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{N} & \xrightarrow{\mathbf{g}_1} & \mathbf{P} & \xrightarrow{\mathbf{g}_2} & \mathbf{I} \\ \uparrow \mathbf{f}_1 & & \uparrow \mathbf{f}_2 & & \\ \mathbf{N}' & \xrightarrow{\mathbf{h}_1} & \mathbf{P}' & \xrightarrow{\mathbf{h}_2} & \mathbf{M} \end{array}$$

7- Escribe el resultado dual del ejercicio anterior. **1**

8- Sea, R_1, R_2, R_3, R_4 cuatro anillos unitarios, M un (R_1, R_2) bimódulo, N un (R_2, R_3) bimódulo y P un (R_1, R_3) bimódulo. Entonces **3**

$$\mathrm{Hom}_{R_1}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{hom}_{R_1}(M, \mathrm{Hom}_{R_3}(N, P)).$$

9- Como se relacionan las resoluciones inyectivas y las sucesiones exactas cortas. Explica que resultados hay y para que sirven. **3**

Nota: En la parte de teoría no se podrán usar los apuntes. Se deben elegir ejercicios (o apartados de estos) para que la puntuación máxima del examen, teoría y problemas, sea de 10.