Capítulo II.

1. PRODUCTO TENSORIAL DE MÓDULOS

En esta sección vamos a construir un grupo abeliano a partir de un R-módulo por la izquierda y un R-módulo por la derecha.

1.1 Def Sea R un anillo unitario, M un R-módulo por la izquierda, N un R-módulo por la derecha y P un grupo abeliano. Se dice que una aplicación $f : N \times M \to P$ es un producto balanceado si verifica:

(i) $f(n_1 + n_2, m) = f(n_1, m) + f(n_2, m)$ para todo $n_1, n_2 \in N$, $m \in M$.

(ii) $f(n, m_1 + m_2 = f(n, m_1) + f(n, m_2$ para todo $n \in N$, $m_1, m_2 \in M$.

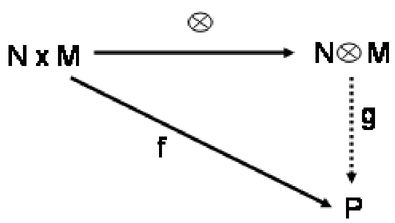
(iii) $f(nr, m) = f(n, rm)$ para todo $n \in N$, $r \in R$, $m \in M$.

1.2 Def Sea R un anillo unitario, M un R-módulo por la izquierda, N un R-módulo por la derecha. Se dice que $(N \otimes M, \otimes)$ es el producto tensorial de N y M si:

(i) $N \otimes M$ es un grupo abeliano.

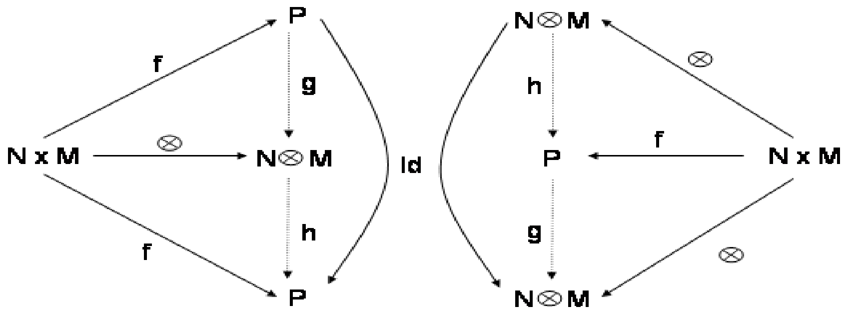
(ii) $\otimes : N \times N \to M \otimes M$ es un producto balanceado de $N \times M$ en el grupo abeliano $N \otimes M$.

(iii) Si P es un grupo abeliano y $f : N \times M \to P$ es un producto balanceado, existe un único morfismo de grupos abelianos $g : N \otimes M \to P$ tal que $g \circ \otimes = f$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.



No hay que ser crédulo y, valga la redundancia, creer que todo lo que se define existe. Veamos que dado un anillo conmutativo R, M un R-módulo por la izquierda y N un R-módulo por la derecha, existe, salvo isomorfismo, el producto tensorial de N y M.

$\star$ Demostremos en primer lugar la unicidad (en este caso, no nos va a dar una idea de como tiene que ser la existencia). Supongamos que P es un grupo abeliano y $f : N \times M \to P$ es un producto balanceado que verifica la propiedad de ser producto tensorial. Podemos entonces construirnos el siguiente diagrama:



en donde g existe, aplicando que P verifica la propiedad de producto tensorial y h existe aplicado que $N \otimes N$ verifica la propiedad de producto tensorial. Es más, si miramos el lado izquierdo del diagrama, $h \circ g \circ f = h \circ \otimes = f$ por lo que, como P verifica la propiedad del producto tensorial $h \circ g = \mathrm{Id}$ y mirando la parte derecha, $g \circ h \circ \otimes = g \circ f = \otimes$ y como $N \otimes N$ verifica la propiedad, $g \circ h = \mathrm{Id}$. Por tanto g y h son isomorfismos, o lo que es lo mismo P es isomorfo a $N \otimes M$ como grupo abeliano.

$\star$ Construyamos un grupo abeliano que tenga la propiedad que caracteriza al tensorial. Sea $N \times M$ considerado como conjunto y $\mathbb{Z}(N \times M)$ el $\mathbb{Z}$ módulo libre generado por este conjunto (recordamos que todo grupo abeliano puede verse como un $\mathbb{Z}$ módulo y que todo $\mathbb{Z}$ modulo es en particular un grupo abeliano). Recordamos que

$$\mathbb{Z}(N \times M) = \{ \sum_{(n,m) \in N \times M} \lambda_{(n,m)}(n,m) \mid \text{en donde casi todo } \lambda_{(n,m)} = 0\}$$

Consideremos $\mathcal{Z}$, el submódulo de $\mathbb{Z}(N \times M)$ generado por los elementos:

$$\mathcal{Z} := < \left\{ \begin{array}{ll} (n_1 + n_2, m) - (n_1, m) - (n_2, m) & \forall\, n_1, n_2 \in N, m \in M \\ (n, m_1 + m_2) - (n, m_1) - (n, m_2) & \forall\, n \in N, m_1, m_2 \in M \\ (nr, m) - (n, rm) & \forall\, n \in N, m \in M, r \in R \end{array} \right\} >$$

y sea $N \otimes M := \mathbb{Z}(N \times M)/\mathcal{Z}$, es decir, el módulo cociente de $\mathbb{Z}(N \times M)$ sobre $\mathcal{Z}$. Veamos que este grupo abeliano verifica la propiedad:

Sea P un grupo abeliano y $f : N \times M \to P$ un producto balanceado. Entonces, si consideramos en conjunto $\{f(n, m)\}_{(n,m)\in N\times M}$, por la propiedad fundamental de los módulos libres, existe un homomorfismo de $\mathbb{Z}$ módulo $g : \mathbb{Z}(N \times M) \to P$, tal que $(n, m)g = f(n, m)$. Veamos ahora que cualquier generador del submódulo $\mathcal{Z}$ está contenido en el $\mathrm{Ker}(g)$:

$$
\begin{aligned}
\star\ & ((n_1 + n_2, m) - (n_1, m) - (n_2, m))g = (n_1 + n_2, m)g - (n_1, m)g - (n_2, m)g \\
& = f(n_1 + n_2, m) - f(n_1, m) - f(n_2, m) = 0 \\
\star\ & ((n, m_1 + m_2) - (n, m_1) - (n, m_2))g = (n, m_1 + m_2)g - (n, m_1)g - (n, m_2)g \\
& = f(n, m_1 + m_2) - f(n, m_1) - f(n, m_2) = 0 \\
\star\ & ((nr, m) - (n, rm))g = (nr, m)g - (n, rm)g = f(nr, m) - f(n, rm) = 0
\end{aligned}
$$

Por tanto, $\mathcal{Z} \subset \mathrm{Ker}\, g$ y aplicando la propiedad fundamental de los módulos cocientes existe una único homomorfismo de $\mathbb{Z}$ módulos $\overline{g} : N \otimes N \to P$ tal que $\overline{g} \circ \otimes = f$.

La información anterior queda resumida en el siguiente diagrama conmutativo, en donde claramente $\otimes = \pi \circ i$:

$$
\begin{tikzcd}
N \times M \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "f"'] & \mathbb{Z}(N \times M) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, dashed, "g"] & N \otimes M \arrow[d, dashed, "\overline{g}"] \\
& & P
\end{tikzcd}
$$

Luego hemos encontrado una aplicación, $\overline{g}$ que hace conmutativo el diagrama. No obstante si existiera una nueva aplicación g' que hiciera conmutativo el diagrama, por la propiedad fundamental de los módulos libres encontraríamos una aplicación $g'' : \mathbb{Z}(N \times M) \to P$ tal que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
N \times M \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & N \otimes M \arrow[d, "g'"] \\
& P
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \times M \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "f"'] & \mathbb{Z}(N \times M) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, dashed, "g''"] & N \otimes M \arrow[d, dashed, "g'"] \\
& & P
\end{tikzcd}
$$

por tanto, $g'' = g$ y $g' = \overline{g}$. ■

1.3 TEOREMA Sean R, S, T tres anillos unitarios, N un (S, R) bimódulo y M un (R, T) bimódulo. Entonces podemos dotar a $N \otimes M$ de estructura de (S, T) bimódulo en donde las operaciones externas son:

$$s(n \otimes m) := sn \otimes m \quad \text{para todo } s \in S, n \in N, m \in M$$
$$(n \otimes m)t := n \otimes mt \quad \text{para todo } n \in N, m \in M, t \in T$$

Nota: Si por un casual, M fuera sólo un R módulo por la izquierda, siempre lo podré considerar un $(R, \mathbb{Z})$ bimódulo y obtendré que $N \otimes M$ es un S módulo por la izquierda. Respectivamente, si N es sólo un R módulo por la derecha, lo considero un $(\mathbb{Z}, R)$ bimódulo y $N \otimes M$ será un T módulo por la derecha.

En lo que sigue, hablaremos de bimódulos, considerando que un R modulo por la izquierda es siempre es un $(R, \mathbb{Z}$ bimódulo y un R módulo por la derecha es siempre un $(\mathbb{Z}, R)$ bimódulo.

1.4 TEOREMA Sean R, S, T anillos unitarios, M y M' dos (R, T) bimódulos, N y N' dos (S, R) bimódulos y $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ dos homomorfismos de bimódulos. Entonces existe un único homomorfismo de (S, T) bimódulos

$$g \otimes f : N \otimes M \to N' \otimes M' \quad \text{tal que} \quad g \otimes f(n \otimes m) = g(n) \otimes (m)f.$$

Además, si N, N' y N'' son tres (S, R) bimódulos, M, M' y M'' son tres (R, T) bimódulos $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ y $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$ y $g' \in \mathrm{Hom}_R(M', M'')$, $g' \in \mathrm{Hom}_R(M', M'')$. Entonces:

(i) $g_1 + g_2 \otimes f_1 = g_1 \otimes f_1 + g_2 \otimes f_1$.

(ii) $g_1 \otimes f_1 + f_2 = g_1 \otimes f_1 + g_1 \otimes f_2$.

(iii) $(g' \otimes f') \circ (g_1 \otimes f_1) = g' \circ g_1 \otimes f_1 \circ f'$ (se compone de forma normal, al ser el tensorial grupos abelianos).

(iv) $\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$

(v) Si f_1 y g_1 son isomorfismos, entonces $g_1 \otimes f_1$ es un isomorfismo, con inversa $g_1^{-1} \otimes f_1^{-1}$.

(vi) Si f_1 y g_1 son epimorfismos, entonces $g_1 \otimes f_1$ es un epimorfismo. ∎

Nota I: la inyectividad no se me ha olvidado. Si f y g son inyectivas, $g \otimes f$ no tiene porque serlo. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definido por $((x)f = 2x$ y $\mathrm{Id} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ verifican que ambas son inyectivas y $\mathrm{Id} \otimes f : \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}$ es la aplicación nula.

Como propiedad independiente, dada su importancia tenemos:

1.5 Teorema Sean R, S, T anillos unitarios, N, M y P tres (R, S) bimódulos y Q un (T, R) bimódulos. Supongamos que tenemos $f : N \to M$, $g : M \to P$ dos homomorfismos de (R,S) bimódulos tales que

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta. Entonces la sucesión

$$Q \otimes N \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes f} Q \otimes M \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes g} Q \otimes P \longrightarrow 0$$

es exacta. Es más, si Q es un R módulo libre la sucesión

$$0 \longrightarrow Q \otimes N \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes f} Q \otimes M \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes g} Q \otimes P \longrightarrow 0$$

es exacta corta. ■

1.6 Teorema Sean R, S anillos unitarios, N, M y P tres (S, R) bimódulos y Q un (R, T) bimódulos. Supongamos que tenemos $f : N \to M$, $g : M \to P$ dos homomorfismos de (S, R) bimódulos tales que

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta. Entonces la sucesión

$$N \otimes Q \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}} M \otimes Q \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}} P \otimes Q \longrightarrow 0$$

es exacta. Es más, si Q es un R módulo libre la sucesión es

$$0 \longrightarrow N \otimes Q \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}} M \otimes Q \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}} P \otimes Q \longrightarrow 0$$

exacta corta . ■

1.7 Teorema Sea R un anillo unitario y M un R módulo por la izquierda (Resp. por la derecha). Entonces $M \cong R \otimes M$ (Resp. $M \cong M \otimes R$).

1.8 Teorema Sean R, S, T anillos unitarios, $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de (R, T) bimódulos (Resp. (S, R) bimódulos) y N un (S, R) bimódulo (Resp. (R,T) bimódulo). Entonces $N \otimes (\oplus_{i \in I} M_i) \cong \oplus_{i \in I}(N \otimes M_i)$ como (S, T) bimódulos (Resp. $(\oplus_{i \in I} M_i) \otimes N \cong \oplus_{i \in I}(M_i \otimes N)$ como (S, T) bimódulos).

1.9 Teorema Sean R_1, R_2, R_3, R_4 cuatro anillos unitarios, N un (R_1, R_2) bimódulo, M un (R_2, R_3) bimódulo y T un (R_3, R_4) bimódulo. Entonces

$$(N \otimes_{R_1} M) \otimes_{R_2} T \cong N \otimes_{R_1} (M \otimes_{R_2} T)$$

como (R_1, R_4) bimódulo.

2. HOMOMORFISMOS DE MÓDULOS

En la sección anterior hemos construido un grupo abeliano a partir de un R módulo por la izquierda y un R módulo por la derecha (al que dotamos de estructura de bimódulo si partimos de bimódulos). En esta sección construiremos un grupo abeliano (un bimódulo) a partir de dos R módulos por la izquierda (por la derecha).

2.1 TEOREMA: Sean R, S, T anillos unitarios, M un (R, S) bimódulo y N un (R, T) bimódulo. Entonces $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, el conjunto de los R módulos por la izquierda, tiene estructura de (S, T) bimódulo si definimos las operaciones por:

$\star$Operación interna:	$(m)f + g := (m)f + (m)g$
$\star 1^a$: Operación externa:	$(m)(sf) := (ms)f$
$\star 2^a$: Operación externa:	$(m)(ft) := (m)ft$

2.2 TEOREMA: Sean R, S, T anillos unitarios, M, M' dos (R, S) bimódulos y N dos (R, T) bimódulos. Entonces asociado a cada par de homomorfismos de bimódulos:

$$f : M' \to M \qquad \text{(homomorfismo de } (R, S) \text{ bimódulos) y}$$
$$g : N \to N' \qquad \text{(homomorfismo de } (R, T) \text{ bimódulos)}$$

existe un homomorfismo de (S, T) bimódulo definido por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_R(f, g) : & \mathrm{Hom}_R(M, N) & \to & Hom_R(M', N) \\ & h & \mapsto & f \circ h \circ g \end{array}$$

Es más,está asociación se comporta bastante bien con todo:

Si $f_1, f_2 : M' \to M$ son homomorfismos de (R, S) bimódulos y $g_1, g_2 : N \to N'$ homomorfismo de (R, T) bimódulos, entonces:

- $\star$ $\mathrm{Hom}_R(f_1 + f_2, g) = \mathrm{Hom}_R(f_1, g) + \mathrm{Hom}_R(f_2, g)$
- $\star$ $\mathrm{Hom}_R(f, g_1 + g_2) = \mathrm{Hom}_R(f, g_1) + \mathrm{Hom}_R(f, g_2)$
- $\star$ $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$

Si $f' : M'' \to M'$ es un homomorfismo de (R, S) bimódulo y $g' : N \to N'$ es un homomorfismo de (R, T) bimódulo, entonces:

- $\star$ $\mathrm{Hom}_R(f, g) \circ \mathrm{Hom}_R(f', g') = \mathrm{Hom}_R(f' f, g g')$

Por tanto,

- ⋆ si f y g son isomorfismos, $\mathrm{Hom}_R(f,g)$ es un isomorfismo.
- ⋆ Si f es sobreyectiva y g inyectiva, $\mathrm{Hom}_R(f,g)$ es inyectiva.

2.3 Teorema Sea R un anillo unitario y

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R módulos por la izquierda. Entonces para todo R módulo por la izquierda Q, las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,Q) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(g,\mathrm{Id})} \mathrm{Hom}_R(M,Q) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{Id})} \mathrm{Hom}_R(N,Q)$$

y

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Q,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Id},f)} \mathrm{Hom}_R(Q,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Id},g)} \mathrm{Hom}_R(Q,P)$$

son exactas. Es más, en la construcción anterior, si Q es un R-módulo libre, las sucesiones anteriores son exactas.

2.4 Teorema Sea, R_1, R_2, R_3, R_4 cuatro anillos unitarios, M un (R_1, R_2) bimódulo, N un (R_2, R_3) bimódulo y P un (R_1, R_3) bimódulo. Entonces

$$\mathrm{Hom}_{R_1}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{hom}_{R_1}(M, \mathrm{Hom}_{R_3}(N,P)).$$