Capítulo II.

1. PRODUCTO TENSORIAL DE MÓDULOS

En esta sección vamos a construir un grupo abeliano a partir de un R-módulo por la izquierda y un R-módulo por la derecha.

1.1 DEF Sea R un anillo unitario, M un R-módulo por la izquierda, N un R-módulo por la derecha y P un grupo abeliano. Se dice que una aplicación $f : N \times M \to P$ es un producto balanceado si verifica:

(i) $f(n_1 + n_2, m) = f(n_1, m) + f(n_2, m)$ para todo $n_1, n_2 \in N$, $m \in M$.

(ii) $f(n, m_1 + m_2 = f(n, m_1) + f(n, m_2$ para todo $n \in N$, $m_1, m_2 \in M$.

(iii) $f(nr, m) = f(n, rm)$ para todo $n \in N$, $r \in R$, $m \in M$.

1.2 DEF Sea R un anillo unitario, M un R-módulo por la izquierda, N un R-módulo por la derecha. Se dice que $(N \otimes M, \otimes)$ es el producto tensorial de N y M si:

(i) $N \otimes M$ es un grupo abeliano.

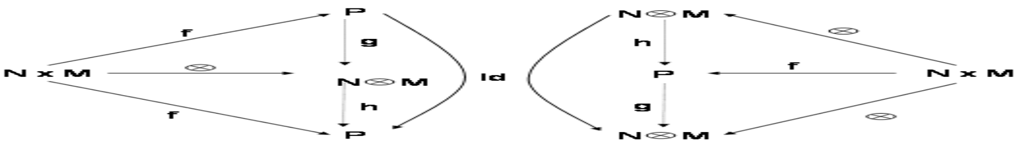
(ii) $\otimes : N \times N \to M \otimes M$ es un producto balanceado de $N \times M$ en el grupo abeliano $N \otimes M$.

(iii) Si P es un grupo abeliano y $f : N \times M \to P$ es un producto balanceado, existe un único morfismo de grupos abelianos $g : N \otimes M \to P$ tal que $g \circ \otimes = f$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
N \times M \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & N \otimes M \arrow[d, dashed, "g"] \\
& P
\end{tikzcd}$$

No hay que ser crédulo y, valga la redundancia, creer que todo lo que se define existe. Veamos que dado un anillo conmutativo R, M un R-módulo por la izquierda y N un R-módulo por la derecha, existe, salvo isomorfismo, el producto tensorial de N y M.

⋆ Demostremos en primer lugar la unicidad (en este caso, no nos va a dar una idea de como tiene que ser la existencia). Supongamos que P es un grupo abeliano y $f : N \times M \to P$ es un producto balanceado que verifica la propiedad de ser producto tensorial. Podemos entonces construirnos el siguiente diagrama:



en donde g existe, aplicando que P verifica la propiedad de producto tensorial y h existe aplicado que $N \otimes N$ verifica la propiedad de producto tensorial. Es más, si miramos el lado izquierdo del diagrama, $h \circ g \circ f = h \circ \otimes = f$ por lo que, como P verifica la propiedad del producto tensorial $h \circ g = \mathrm{Id}$ y mirando la parte derecha, $g \circ h \circ \otimes = g \circ f = \otimes$ y como $N \otimes N$ verifica la propiedad, $g \circ h = \mathrm{Id}$. Por tanto g y h son isomorfismos, o lo que es lo mismo P es isomorfo a $N \otimes M$ como grupo abeliano.

⋆ Construyamos un grupo abeliano que tenga la propiedad que caracteriza al tensorial. Sea $N \times M$ considerado como conjunto y $\mathbb{Z}(N \times M)$ el $\mathbb{Z}$ módulo libre generado por este conjunto (recordamos que todo grupo abeliano puede verse como un $\mathbb{Z}$ módulo y que todo $\mathbb{Z}$ modulo es en particular un grupo abeliano). Recordamos que

$$\mathbb{Z}(N \times M) = \{ \sum_{(n,m) \in N \times M} \lambda_{(n,m)}(n,m) \mid \text{en donde casi todo } \lambda_{(n,m)} = 0\}$$

Consideremos $\mathcal{Z}$, el submódulo de $\mathbb{Z}(N \times M)$ generado por los elementos:

$$\mathcal{Z} :=< \left\{ \begin{array}{ll} (n_1 + n_2, m) - (n_1, m) - (n_2, m) & \forall\, n_1, n_2 \in N, m \in M \\ (n, m_1 + m_2) - (n, m_1) - (n, m_2) & \forall\, n \in N, m_1, m_2 \in M \\ (nr, m) - (n, rm) & \forall\, n \in N, m \in M, r \in R \end{array} \right\} >$$

y sea $N \otimes N := \mathbb{Z}(N \times M)/\mathcal{Z}$ el módulo cociente de $\mathbb{Z}(N \times M)$ sobre $\mathcal{Z}$. Veamos que este grupo abeliano verifica la propiedad: