Capítulo III.

1. CATEGORíAS

1.1 DEF: Se define una categoría $\mathcal{C}$ como un par de clases $\mathcal{C} := (\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, \mathrm{Mor}\,\mathcal{C})$, llamadas respectivamente la clase de los objetos y la clase de los morfismos tal que:

(i) Para cada par (ordenado) de elementos $(A, B) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ existe un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, cuyos elementos son llamados morfismos con dominio A y codominio B, tales que

(i.1) Si $(A, B) \neq (C, D)$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$

(i.2) $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} = \bigcup_{(A,B)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$

(ii) Para cada $(A, B, C) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, conjunto ordenado, existe una aplicación

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \times & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ f & & g & & f \circ g \end{array}$$

verificando:

(ii.1) Si $(A, B, C, D) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ y $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ entonces $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

(ii.1) Para cada $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ existe un único $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ tal que para todo $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ y todos $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, $1_A \circ g = g$, $h \circ 1_A = h$.

1.2 EJEMPLOS: Tenemos la categorías siguientes:

- **Set**: que tiene por clase de objetos la clase de todos los conjuntos y por morfismos entre estos, las aplicaciones entre conjuntos.
- **Grp**: que tiene por clase de objetos la clase de todos los grupos y por morfismos entre estos, los homomorfismos de grupos.
- **Ab**: que tiene por clase de objetos la clase de todos los grupos abelianos y por morfismos entre estos, los homomorfismos de grupos (abelianos).
- **Ring**: que tiene por clase de objetos la clase de todos los anillos y por morfismos entre estos, los homomorfismos de anillos.
- R-**Mod**: que tiene por clase de objetos la clase de todos los R-módulos por la izquierda y por morfismos entre estos, los homomorfismos de R-módulos por la izquierda.

- **Mod-**R: que tiene por clase de objetos la clase de todos los R-módulos por la derecha y por morfismos entre estos, los homomorfismos de R-módulos por la derecha.
- **Top**: que tiene por clase de objetos la clase de todos los espacios topológicos y por morfismos entre estos, las aplicaciones continuas entre estos.
- Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado, podemos considerar

$$\operatorname{Ob} X := X \quad \text{y} \quad \operatorname{Hom}(x, y) := \begin{cases} (\text{x, y}) & \text{Si } x \leq y \\ \emptyset & \text{Si } x \not\leq y \end{cases}$$

1.3 Def: Diremos que una categoría $\mathcal{C}$ es pequea si $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ es un conjunto.

Nota: De las categorías anteriores sólo la última es una categoría pequeña.

1.4 Def: Diremos que un morfismo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un isomorfismo si existe $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que $f \circ g = \operatorname{Id}_A$ y $g \circ f = \operatorname{Id}_B$. A g se le denomina el inverso de f. Es claro que g es único, por lo que lo denotaremos por f^{-1}.

Nota: la composición de isomorfismos es un isomorfismo. Es más,

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Los isomorfismos en **Set, Grp** y **Ab** son precisamente las aplicaciones biyectivas y los isomorfismos de grupo respectivamente. En la categoría definida por un conjunto ordenado, sólo las aplicaciones identidad son isomorfismos.

1.5 Def: Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Se dice que $\mathcal{D}$ es una subcategorías de $\mathcal{C}$ si

- $\operatorname{Ob}\mathcal{D} \subset \operatorname{Ob}\mathcal{C}$
- Para cada $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) \subset \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$
- El neutro y la composición en $\mathcal{D}$ son los de $\mathcal{C}$.

$\star$ Se dice que una subcategoría $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ es plena si para todo par $(A, B) \subset \operatorname{Ob}(D)$, se tiene que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$.

Nota: La categoría **Ab** es una subcategoría plena de **Grp**. La categoría **Grp** no es una subcategoría plena de **Set**.

1.6 Lema Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Entonces podemos definir una nueva categoría, $\mathcal{C}^{op}$, llamada categoría opuesta, que tiene por clase de objetos la misma que

$\mathcal{C}$ y por clase de morfismos: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ con composición la procedente de $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) & \times & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B,C) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,C) \\ f & & g & & g \circ f \end{array}$$

Nota: observar que se ha cambiado el orden de la composición.

1.7 Lema Sea $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Entonces podemos definir una nueva categoría, $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, llamada la categoría producto, que tiene:

- Objetos $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$
- Morfismos: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((A,B),(C,D)) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,D)$. En donde la unidad y composición son las obvias.

1.8 Def: Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$. Se dice que f es:

(i) épico si para todo par de morfismos $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$,

$$\text{Si } f \circ g_1 = f \circ g_2, \quad \text{entonces} \quad g_1 = g_2.$$

(i) mónico si para todo par de morfismos $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$,

$$\text{Si } g_1 \circ f = g_2 \circ f, \quad \text{entonces} \quad g_1 = g_2.$$

Nota En la categoría **Set** mónico equivale a inyectivo, épico a sobreyectivo. Es más, en cualquier subcategoría de la categoría **Set**, se tiene que:

⋆ Inyectivo implica mónico.

⋆ Sobreyectivo implica épico.

En la categoría **Ring** (que es subcategoría de **Set**) mónico es inyectivo, pero épico no equivale a sobreyectivo: Lo aplicación inclusión de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ es épica, pero no es sobreyectiva.

1.9 Ejercicio ¿Cuales son los morfismos mónico y épico en la categoría procedente de un conjunto ordenado?

Nos encontramos en condiciones de definir sumas directas y productos en categorías. Es más, cualquier propiedad que podamos definir por una propiedad universal, se podrá definir en categorías:

1.10 Def: Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\{A_i\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ con $i \in I$. Se define el producto directo de los $\{A_i\}$ como un par, $(A, \{p_i\}_{i\in I})$ en donde $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A_i)$ con $i \in I$ tales que para cada $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ y cada familia de homomorfismos $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A_i)$ existe un único homomorfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que $f \circ p_i = f_i$ para todo i.

Nota: Es claro que en la categoría de anillos, de grupos, de grupos abelianos, de R módulos, o en la de conjuntos, el producto de una familia de objetos existe y el, respectivamente, el producto de anillos, grupos, grupos abelianos, de R módulos o conjuntos.

$\star$ No en toda categoría existe el producto de objetos, es mas, la categoría definida por el conjunto ordenado, ¿a que equivale el producto de objetos?

1.11 Proposición Si el producto de objetos existe en una categoría $\mathcal{C}$, este es único salvo isomorfismo.

1.12 Def: Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\{A_i\} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ con $i \in I$. Se define el coproducto de los $\{A_i\}$ como un par, $(A, \{\rho_i\}_{i\in I})$ en donde $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\rho_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, A)$ con $i \in I$ tales que para cada $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ y cada familia de homomorfismos $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, B)$ existe un único homomorfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $\rho_i \circ f = f_i$ para todo i.

Nota: Es claro que en la categoría de grupos, de grupos abelianos, o de R módulos, el coproducto de una familia de objetos existe y el, respectivamente, la suma directa de grupos, grupos abelianos o R módulos.

$\star$ No en toda categoría existe el producto de objetos, es mas, la categoría definida por el conjunto ordenado, ¿a que equivale el coproducto de objetos?

1.13 Proposición Si el coproducto de objetos existe en una categoría $\mathcal{C}$, este es único salvo isomorfismo.

1.14 Ejercicio Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Se dice que $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ es inicial si para todo $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ existe un único morfismos en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Demuestra que si existe un objeto inicial, este es único salvo isomorfismo. ¿De las categorías expuestas cuales poseen objeto inicial? ¿Que seria un objeto inicial en la categoría procedente de un conjunto ordenado?

1.15 Ejercicio Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Se dice que $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ es final si para todo $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ existe un único morfismos en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Demuestra que si existe un objeto final, este es único salvo isomorfismo. ¿De las categorías expuestas cuales poseen objeto final? ¿Que seria un objeto final en la categoría procedente de un conjunto ordenado?

2. FUNTORES

En esta sección vamos a definir y estudiar las propiedades de las "aplicaciones" entre categorías.

2.1 DEF: Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Se define un funtor covariante $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ como un par de aplicaciones:

- $\mathcal{F}_o b : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$
- Para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ una aplicación

$$\mathcal{F}_2 : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}_1(A), \mathcal{F}_1(B))$$

tales que:

- Para todo $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\mathcal{F}_2(1_A) = 1_{\mathcal{F}_1(A)}$
- Para todo $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$,

$$\mathcal{F}_2(f \circ g) = \mathcal{F}_2(f) \circ \mathcal{F}_2(g).$$

2.2 DEF: Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Se define un funtor contravariante $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ como un par de aplicaciones:

- $\mathcal{F}_o b : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$
- Para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ una aplicación

$$\mathcal{F}_2 : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}_1(B), \mathcal{F}_1(A))$$

tales que:

- Para todo $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\mathcal{F}_2(1_A) = 1_{\mathcal{F}_1(A)}$
- Para todo $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$,

$$\mathcal{F}_2(f \circ g) = \mathcal{F}_2(g) \circ \mathcal{F}_2(f).$$

Nota: Si $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor covariante (contravariante), entonces $\bar{\mathcal{F}} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ definido por $\bar{\mathcal{F}}_1 := \mathcal{F}_1$ y $\bar{\mathcal{F}}_2 := \mathcal{F}_2$ es un funtor contravariante (covariante).

2.3 Def: Un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice fiel si para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ la aplicación $\mathcal{F}_2$ restringida a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es inyectiva. Caso de ser sobreyectiva se dirá que el funtor $\mathcal{F}$ es pleno.

2.4 Ejemplos:

- ⋆ Sea $\mathcal{D}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$. Entonces, la aplicación inclusión es un funtor de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{C}$. Observar que si $\mathcal{D}$ es una subcategoría plena, el funtor inclusion es pleno (en cualquier caso siempre es fiel).
- ⋆ La aplicación inclusión de la categoría de grupos, anillos, espacios vectoriales, topológicos, etc. en la categoría de conjuntos se denomina funtor olvido.
- ⋆ Un funtor entre dos categorías de conjuntos ordenados es precisamente una aplicación monótona (creciente para funtores covariantes, de creciente para funtores contravariantes).
- ⋆ Para el producto de categorías tenemos el funtor proyección.

Veamos ahora que hemos trabajado con varios funtores, aun sin saberlo:

- ⋆ Dado R un anillo unitario y M un R módulo por la izquierda tenemos:
- ⋆ El funtor covariante $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ de la categoría de R-mod en la categoría de grupos abelianos definido por

$$\mathrm{Hom}_R(M, -)_1(N) := \mathrm{Hom}_R(M, N)$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, -)_2(f) := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Id}, f)$$

- ⋆ El funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ de la categoría de R-mod en la categoría de grupos abelianos definido por

$$\mathrm{Hom}_R(-, M)_1(N) := \mathrm{Hom}_R(N, M)$$
$$\mathrm{Hom}_R(-, M)_2(f) := \mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{Id})$$

- ⋆ Dado R un anillo unitario y M un R módulo por la izquierda tenemos el funtor covariante $- \otimes M$ de la categoría de R-mod por la derecha en la categoría de grupos abelianos definido por

$$(- \otimes M)_1(N) := N \otimes M$$
$$(- \otimes M)_2(f) := f \otimes \mathrm{Id}$$

⋆ El funtor covariante $M \otimes -$ de la categoría de R-mod por la izquierda en la categoría de grupos abelianos definido por

$$\begin{aligned}(M \otimes -)_1(N) &:= M \otimes N \\ (M \otimes -)_2(f) &:= \mathrm{Id} \otimes f\end{aligned}$$

⋆ El funtor covariante $- \otimes M$ de la categoría de R-mod por la derecha en la categoría de grupos abelianos definido por

$$\begin{aligned}(- \otimes M)_1(N) &:= N \otimes M \\ (- \otimes M)_2(f) &:= f \otimes \mathrm{Id}\end{aligned}$$

2.5 PROPOSICIÓN Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ tres categorías, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ dos funtores, entonces $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ es un funtor de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{E}$. Es más, $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ es covariante si ambos son del mismo tipo, contravariante en caso contrario.

Nota: Un funtor (covariante o contravariante) manda un isomorfismo en un isomorfismo. No sucede así para los morfismos mónicos o épicos (ver el funtor olvido de la categoría **Ring** en la categoría **Set**.

⋆ Los ejemplos $\mathrm{Hom}_R(M, -)$, $\mathrm{Hom}_R(-, M)$, $M \otimes -$ y $- \otimes M$ da pie a definir el concepto de bifuntor, y más generalmente, el concepto de funtor en varias variables.

2.6 DEF: Sean $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ una familia de categorías con $\#I = n$ y $\mathcal{D}$ otra categoría. Sea $J \subset I$ y $\sigma : I \to \{op, \ \}$ la aplicación

$$\sigma(i) = \begin{cases} & \text{Si } i \in J \\ op & \text{Si } i \in I - J \end{cases}$$

Se define un funtor en n variables covariante en J y contravariante en $I - J$, como un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C}_1^{\sigma(1)} \times \cdots \times \mathcal{C}_n^{\sigma(n)} \to \mathcal{D}$.

2.7 EJEMPLOS ⋆ Sea R un anillo unitario. Entonces $\mathrm{Hom}_R(-, -)$ es un bi-funtor (funtor en dos variables), de la categoría de R-módulos por la izquierda (por la derecha) en la categoría de grupos abelianos, contravariante en la primera variable y covariante en la segundo.

⋆ Sea R un anillo unitario. Entonces el funtor $- \otimes -$ de la categoría de R módulos por la derecha por la categoría de R -módulos por la izquierda en la categoría de grupos abelianos es un funtor covariante en ambas variables.

Nota: Sean $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ una familia de categorías con $\#I = n$ y $\mathcal{D}$ otra categoría. Sea $J \subset I$ y $\sigma : I \to \{op,\ \}$ la aplicación definida por:

$$\sigma(i) = \begin{cases} & \text{si } i \in J \\ op & \text{si } i \in I - J \end{cases}$$

Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C}_1^{\sigma(1)} \times \cdots \times \mathcal{C}_n^{\sigma(n)} \to \mathcal{D}$ un funtor en n variables, covariante en J y contravariante en $I - J$. Entonces si fijamos k coordenadas, (fijando los objetos y los morfismos correspondientes) nos encontramos con un funtor en $n-k$ variables.

3. CATEGORíAS DE DIAGRAMAS

3.1 Def: Sea R un anillo unitario, I un conjunto de indices y $\Gamma \subset I \times I$. Se define la categoría de diagramas sobre (I, Γ) como:

$\star$ La clase de los objetos esta formada por los pares $(\{M_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{(i,j)\in\Gamma})$ en donde:

- $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos por la izquierda (por la derecha),
- $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_R(M_i, M_j)$ para cada $(i,j) \in \Gamma$,
- si $(i,j), (j,k) \in \Gamma$, entonces $(i,k) \in \Gamma$ y además, $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$.

$\star$ La clase de los morfismos son: dados $\mathcal{M} := (\{M_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{(i,j)\in\Gamma})$, $\mathcal{N} := (\{N_i\}_{i\in I}, \{g_{ij}\}_{(i,j)\in\Gamma})$ dos diagramas sobre (I, Γ), un homomorfismo $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es una familia $\phi_i \in \mathrm{Hom}_R(M_i, N_i)$, con $i \in I$, tales que si $(i,j) \in \Gamma$, $\phi_i \circ g_{ij} = f_{ij} \circ \phi_j$.

3.2 Ejemplo: Consideremos la categoría de diagramas de la forma:

$$M_1 \xrightarrow{f_{12}} M_2$$

Aquí el conjunto de indices es $I = \{1,2\}$ y $\Gamma = \{(1,2)\}$. Un morfismo ϕ entre $M_1 \xrightarrow{f_{12}} M_2$ y $N_1 \xrightarrow{g_{12}} N_2$ será un par de homomorfismos de R módulos $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_{12}"] \arrow[d, "\phi_1"'] & M_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ N_1 \arrow[r, "g_{12}"'] & N_2 \end{tikzcd}$$

3.3 Ejercicio Nos encontramos con 4 funtores covariantes de esta categoría en la categoría de R-módulos que, realmente, ya han sido definidos: sean

$$\mathcal{M} = M \xrightarrow{f} M, \quad \mathcal{N} = N \xrightarrow{g} N \quad \text{y} \quad \phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

$\star$ El funtor Ker, definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}_1(\mathcal{M}) &= \mathrm{Ker}(f) \\ \mathrm{Ker}_2(\phi) &= \phi_1 : \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g) \end{aligned}$$

$\star$ El funtor Im, definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}_1(\mathcal{M}) &= \mathrm{Im}(f) \\ \mathrm{Im}_2(\phi) &= \phi_2 : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(g) \end{aligned}$$

$\star$ El funtor CoKer, definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{CoKer}_1(\mathcal{M}) &= \mathrm{CoKer}(f) \\ \mathrm{CoKer}_2(\phi) &= \phi_2 : \mathrm{CoKer}(f) \to \mathrm{CoKer}(g) \end{aligned}$$

$\star$ El funtor CoIm, definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{CoIm}_1(\mathcal{M}) &= \mathrm{CoIm}(f) \\ \mathrm{CoIm}_2(\phi) &= \phi_1 : \mathrm{CoIm}(f) \to \mathrm{CoIm}(g) \end{aligned}$$

3.4 Proposición Sea R un anillo unitario y M', M, M'', N cuatro R módulos y f', f, g tres homomorfismos de R módulos tales que en el siguiente diagrama, la fila es exacta y se verifica que $f' \circ g = 0$.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M'' \arrow[r] & 0 \\ & N & & \end{tikzcd}$$

Entonces existe un único homomorfismo de R módulos $h : M'' \to N$ que hace conmutativo el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "f'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M'' \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "h"] & 0 \\
 & N & &
\end{tikzcd}
$$

Es más, cualquier morfismo de diagramas del primer tipo, es un morfismo de diagramas del segundo.

3.5 Corolario Sea R un anillo unitario y M', M, M'', N', N, N'' seis R módulos y f', f, g', g, h', h seis morfismos de R módulos tales que el siguiente diagrama es conmutativo con la fila superior exacta y la fila inferior una sucesión.

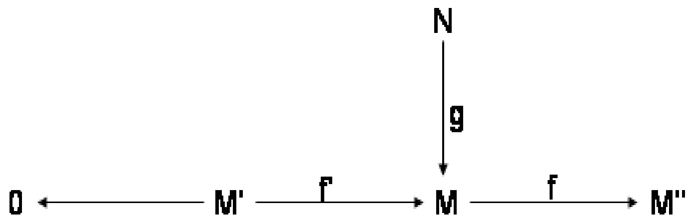
$$
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[r] & 0 \\
N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N'' &
\end{tikzcd}
$$

Entonces existe un único homomorfismo de R módulos $h : M'' \to N''$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo.

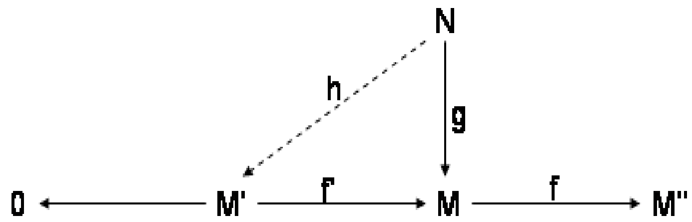
$$
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h''"] & 0 \\
N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N'' &
\end{tikzcd}
$$

Es más, cualquier morfismo de diagramas del primer tipo, es un morfismo de diagramas del segundo.

3.6 Proposición Sea R un anillo unitario y M', M, M'', N cuatro R módulos y f', f, g tres homomorfismos de R módulos tales que en el siguiente diagrama, la fila es exacta y se verifica que $g \circ f = 0$.

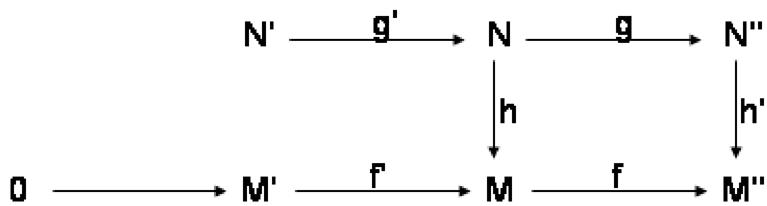


Entonces existe un único homomorfismo de R módulos $h : N \to M'$ que hace conmutativo el diagrama:

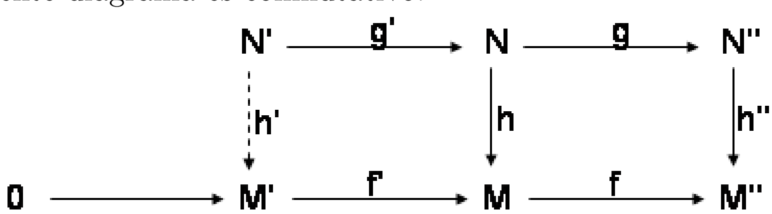


Es más, cualquier morfismo de diagramas del primer tipo, es un morfismo de diagramas del segundo.

3.7 Corolario Sea R un anillo unitario y M', M, M'', N', N, N'' seis R módulos y f', f, g', g, h', h seis morfismos de R módulos tales que el siguiente diagrama es conmutativo con la fila inferior exacta y la fila superior una sucesión.



Entonces existe un único homomorfismo de R módulos $h' : N' \to M'$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo.



Es más, cualquier morfismo de diagramas del primer tipo, es un morfismo de diagramas del segundo.