Capítulo V.

1. MÓDULOS PROYECTIVOS

1.1 Def: Sea R un anillo unitario. Se dice que un R-módulo P es proyectivo si para todo par de módulos N, M y homomorfismos $h : P \to M$ y $f : N \to M$, con f sobreyectivo, existe un homomorfismo $h' : P \to N$ tal que $h' \circ f = h$. En forma de diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h'"'] \arrow[d, "h"] & \\ N \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nota: Todo módulo libre es proyectivo.

Dado un R-módulo P, sabemos que el funtor $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ es exacto por la izquierda, es decir, una sucesión exacta corta de R módulos,

$$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Q \to 0$$

da lugar a una sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, N) \to \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, Q)$$

Nota: puede ocurrir que $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Id}, g)$ no sea sobreyectiva. El siguiente teorema caracteriza los módulos proyectivos a partir de este funtor.

1.2 Teorema Sea R un anillo unitario y P un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) P es proyectivo.

(ii) El funtor $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ es exacto.

1.3 Proposición Sea R un anillo unitario y P_i una familia de R-módulos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $P := \bigoplus P_i$ es proyectivo.

(ii) Cada P_i es proyectivo.

1.4 TEOREMA Sea R un anillo unitario y P un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) P es proyectivo.

(ii) Toda sucesión exacta corta de R-módulos $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ es escindida.

Los teoremas anteriores junto con la propiedad vista en temas anteriores que nos demostraba que todo R-módulo M puede verse como cociente de un módulo libre nos lleva al siguiente Teorema.

1.5 TEOREMA Sea R un anillo unitario y P un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) P es proyectivo.

(ii) P es sumando directo de un módulo libre.

Veamos como se comportan los R-módulos proyectivos respecto del funtor producto tensorial. Dado un R-módulo P, sabemos que el funtor $-\otimes P$ es exacto por la derecha, es decir, una sucesión exacta corta de R módulos,

$$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Q \to 0$$

da lugar a una sucesión exacta de grupos abelianos

$$N \otimes P \to M \otimes P \to Q \otimes P \to 0$$

Nota: puede ocurrir que $f \otimes \mathrm{Id}$ no sea inyectiva.

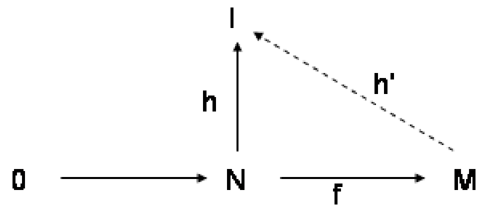
1.6 PROPOSICIÓN Sea R un anillo unitario, P un R-módulo por la izquierda proyectivo y P' un R-módulo por la derecha proyectivo. Entonces $-\otimes P$ y $P' \otimes -$ son funtores exactos.

La siguiente proposición la resaltamos, ya que nos será de utilidad.

1.7 PROPOSICIÓN Sea R un anillo unitario y M un R-módulo. Entonces existe un R-módulo proyectivo P y un epimorfismo de módulo $f : P \to M$.

2. MÓDULOS INYECTIVOS

2.1 DEF: Sea R un anillo unitario. Se dice que un R-módulo I es inyectivo si para todo par de módulos N, M y homomorfismos $h : N \to I$ y $f : N \to M$, con f inyectivo, existe un homomorfismo $h' : M \to I$ tal que $f \circ h' = h$. En forma de diagrama:



Dado un R-módulo P, sabemos que el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-, I)$ es exacto por la izquierda, es decir, una sucesión exacta corta de R módulos,

$$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Q \to 0$$

da lugar a una sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(Q, I) \to \mathrm{Hom}_R(M, I) \to \mathrm{Hom}_R(N, I)$$

Nota: puede ocurrir que $\mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{Id})$ no sea sobreyectiva. El siguiente teorema caracteriza los módulos inyectivos a partir de este funtor.

2.2 Teorema Sea R un anillo unitario y I un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) P es inyectivo.

(ii) El funtor $\mathrm{Hom}_R(-, I)$ es exacto.

2.3 Proposición Sea R un anillo unitario y I_i una familia de R-módulos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $I := \prod I_i$ es inyectivo.

(ii) Cada P_i es inyectivo.

2.4 Teorema Sea R un anillo unitario y I un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) I es inyectivo.

(ii) Toda sucesión exacta corta de R-módulos $0 \to I \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Q \to 0$ es escindida.

Como resultado dual al hecho de que todo módulo es cociente de un módulo proyectivo (es más, de un módulo libre) enunciamos el siguiente resultado (que no será demostrado por el momento):

2.5 PROPOSICIÓN Sea R un anillo unitario y M un R-módulo. Entonces existe un R-módulo inyectivo I y un monomorfismo de módulo $f : M \to I$.

3. RESOLUCIONES PROYECTIVAS E INYECTIVAS

3.1 DEF: Sea M un R módulo. Por una resolución proyectiva sobre M entenderemos cualquier complejo exacto

$$\cdots \to P_{-n} \to P_{-n+1} \to \cdots \to P_1 \to M \to 0 \to 0 \cdots$$

en donde todos los P_i son R-módulos proyectivos.

3.2 DEF: Sea M un R-módulo. Por una resolución inyectiva sobre M entenderemos un complejo exacto

$$0 \to 0 \to M \to I_1 \to \cdots \to I_n \to I_{n+1} \to \cdots$$

en donde todos los I_i son R-módulos inyectivos.

3.3 TEOREMA Sea R un anillo unitario, M y N dos R-módulos por la izquierda y $f : M \to N$ un homomorfismo de R-módulos. Entonces

(i) M y N poseen resoluciones proyectivas.

(ii) f se extiende a un homomorfismo entre sus resoluciones proyectivas que es único salvo traslaciones homotópicas.

3.4 TEOREMA Sea R un anillo unitario, M y N dos R-módulos por la izquierda y $f : M \to N$ un homomorfismo de R-módulos. Entonces

(i) M y N poseen resoluciones inyectivas.

(ii) f se extiende a un homomorfismo entre sus resoluciones inyectivas que es único salvo traslaciones homotópicas.