Capítulo 1

Conceptos Básicos

Objetivos del capítulo

- Introducir los conceptos básicos de la Teoría de conjuntos. Estudiar las operaciones entre conjuntos y sus propiedades.
- Estudiar el concepto de aplicación. Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas. Composición de aplicaciones. Aplicación inversible y caracterizaciones.
- Estudio de las relaciones de equivalencia y su relación con las particiones. Estudio de las relaciones de orden y sus elementos notables.
- Nociones básicas sobre cardinales.

---

1. Conjuntos.

Toda teoría matemática consta de axiomas, o elementos primitivos, a partir de estos se construyen las definiciones. Las relaciones "lógicas" entre definiciones dan lugar a los teoremas (Lema, Proposición, Teorema y Corolario). Comenzamos este capítulo con la noción de conjunto.

1.1. Definiciones básicas.

Conceptos **A** Un **conjunto** es una colección de objetos. Para construir o crear un conjunto damos explícitamente cada uno de sus elementos o bien damos una propiedad que caracterice a dichos elementos.

⋆ Hasta que no se han dado o caracterizados los elementos de un conjunto, este no es, por lo que la propiedad que determina a los elementos de un conjunto no debe de hacer uso del conjunto en sí. Esta propiedad, como puede verse en el ejercicio 6 (Pag. 23), puede ser algo escurridiza.

⋆ Por la misma razón, un conjunto no puede ser elemento de si mismo (para incluirlo como elemento tiene que ser algo y un conjunto no es algo hasta que se fijan todos sus elementos).

Definición 1 Diremos que un elemento "a" **pertenece** a un conjunto X, y lo denotaremos por $a \in X$, si a es uno de los miembros de X. Si a no es miembro de X diremos que a **no pertenece** a X y lo denotaremos por $a \notin X$.

Nota: Para que un conjunto esté correctamente definido debe de poderse determinar si un objeto pertenece o no pertenece a él de forma inequívoca.
Notación: Los conjuntos los denotaremos por letras mayúsculas mientras que los elementos serán denotados por letras minúsculas.

Ejemplos B

⋆ El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$.

⋆ El conjunto de los números naturales que son pares.

⋆ $A =: \{1, 2, a\}; B =: \{a, b, c\}; C =: \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

⋆ $Y =: \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\}$.

⋆ $X =: \{1, 2, 3, \{1, c\}, \{a\}, b\}$. En este caso, algunos de los elementos de este conjunto son a su vez conjuntos. Esto nos puede llevar a cierta confusión a la hora de saber si un elemento pertenece o no a un conjunto. Así, en este ejemplo,

$$1, b, \{1, c\} \in X, \quad \text{pero} \quad a, c, \{1\}, \{2\} \notin X$$

Definición 2 Sean X e Y dos conjuntos:
• Diremos que X es un **subconjunto** de Y, y lo representaremos por $X \subset Y$, que se leerá X contenido en Y, si todo elemento de X es elemento de Y, es decir,

$$X \subset Y \quad \iff^{*} \quad \forall^{\dagger} a \in X, \Rightarrow^{\ddagger} a \in Y$$

En caso contrario, cuando X no sea subconjunto de Y (lo que significa que hay un elemento de X que no es elemento de Y) se denotará por $X \not\subset Y$.
• Diremos que X es **igual** a Y, y lo representaremos $X = Y$, si

$$X \subset Y \text{ e } Y \subset X.$$

Denotaremos por $X \neq Y$ cuando X **no** sea **igual** que Y.
• Diremos que X está **estrictamente contenido** en Y, y lo denotaremos $X \subsetneq Y$ si

$$X \subset Y \text{ y } X \neq Y.$$

• Definimos el **conjunto vacío**, denotado por $\emptyset$, como aquél que carece de elementos.
• Definimos el **conjunto partes de** X, y lo representamos por $\mathcal{P}(X)$ como el conjunto que tiene por elementos los subconjuntos de X.

---

[*] Relación lógica $\iff$: establece que las proposiciones a izquierda y derecha de ella son o ambas falsas o ambas verdaderas. A veces es usada para dar una definición

[†] $\forall$: se lee para todo

[‡] Relación lógica $\Rightarrow$: establece que si la proposición de la izquierda es verdadera, la de la derecha también lo es

Nota: Observar que de la igualdad de conjuntos se deduce que no importa el "orden" en el que se encuentren colocados los elementos de un conjunto. Así, el conjunto $\{a, b, c\}$ es el mismo que el conjunto $\{c, a, b\}$.

Ejemplos C

$\star$ Las nociones de pertenece y contenido, aunque fáciles pueden llegar a confundirnos. Sea $X = \{1, \{1\}, \{1, a\}, \{a\}\}$. Entonces

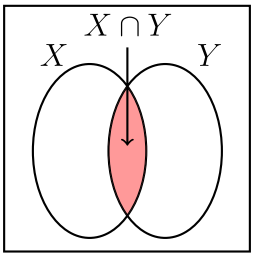
$$1, \{a\} \in X, \quad a \notin X, \quad \{1\}, \{\{a\}\} \subset X, \quad \{1, a\} \not\subset X$$

Observar que en este ejemplo $\{1\} \in X$ y $\{1\} \subset X$.

$\star$ Para $A = \{1, 2, a\}$, se tiene que

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1, 2\}, \{1, a\}, \{2, a\}, \{1, 2, a\}\}.$$

1.2. Operaciones con conjuntos



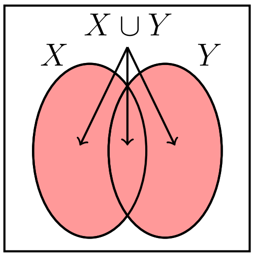
Definición 3 Dados dos conjuntos X, Y, se define la **intersección** de X con Y y se representa por $X \cap Y$ a un nuevo conjunto que tiene los elementos que están tanto en X como en Y.

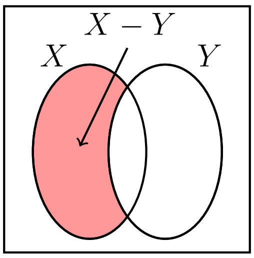
$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ y } z \in Y\}$$

Nota: Diremos que dos conjuntos X, Y son **disjuntos** si $X \cap Y = \emptyset$.

Definición 4 Dados dos conjuntos X, Y, se define la **unión** de X con Y y se representa por $X \cup Y$ a un nuevo conjunto que tiene por elementos tanto los elementos de X como los de Y.

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ ó } z \in Y\}$$



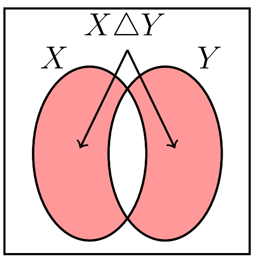


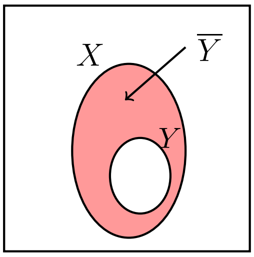
Definición 5 Dados dos conjuntos X, Y, se define la **diferencia** de X con Y y se representa por $X - Y$ al conjunto formado por los elementos de X que no están en Y. Es decir,

$$X - Y = \{z \in X \mid z \notin Y\}$$

Definición 6 Dados dos conjuntos X, Y, se define la **diferencia simétrica** de X con Y y se representa por $X \triangle Y$ al conjunto formado por los elementos de X que no están en Y junto con los de Y que no están en X.

$$X \triangle Y = (X \cup Y) - (Y \cap X) = (X - Y) \cup (Y - X)$$





Definición 7 Dados dos conjuntos X, Y, con X subconjunto de Y se define el **complemento** de X en Y y se representa por $\overline{X}$ al conjunto formado por los elementos de Y que no están en X. Es decir,

$$\overline{X} = \{z \in Y \mid z \notin X\}$$

Definición 8 Dados dos conjuntos X, Y se define el **producto cartesiano** de X e Y y se representa por $X \times Y$ como un nuevo conjunto formado por todos los pares (x, y) en donde $x \in X$ e $y \in Y$.

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

Ejemplos D Dados $A = \{1, 2, a\}$ y $B = \{a, b, c\}$ se tiene que

$$A \times B := \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (a, a), (a, b), (a, c)\}$$

Nota: Los conjuntos $X \times Y$ e $Y \times X$ son distintos siempre que $X \neq Y$.

Proposición 9 Sean X, Y, Z tres conjuntos. Entonces:

(i) Propiedad Conmutativa: $X \cup Y = Y \cup X$; $\quad X \cap Y = Y \cap X$.

(ii) Propiedad asociativa: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.

(iii) Propiedad distributiva: $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$
$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

(iv) Propiedad Idempotente: $X \cup X = X$; $\quad X \cap X = X$.

(v) Leyes de simplificación: $(X \cup Y) \cap X = X$; $\quad (X \cap Y) \cup X = X$.

(vi) Leyes de Morgan: supongamos que X, Y son subconjuntos de un conjunto T, entonces:

$$\overline{(X \cup Y)} = \overline{X} \cap \overline{Y}; \quad \overline{(X \cap Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y}.$$

Demo: (i) Demostremos que $X \cup Y = Y \cup X$. Para ello tenemos que demostrar que $X \cup Y \subset Y \cup X$ y que $Y \cup X \subset X \cup Y$. Veamos el primer contenido:

Sea $a \in X \cup Y$ tenemos, por definición de unión de conjuntos que $a \in X$ o $a \in Y$. Por tanto, $a \in Y \cup X$. El otro contenido es igual.

(ii). Demostremos que $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$. Sea $a \in (X \cup Y) \cup Z$. Por la definición de unión, $a \in X \cup Y$ o $a \in Z$ y por tanto, $a \in X$ o $a \in Y$ o $a \in Z$. Así, $a \in X$ o $a \in Y \cup Z$ lo que implica que $a \in X \cup (Y \cup Z)$. El otro contenido es idéntico.

Nota: Es posible que estas dos primeras demostraciones, de fáciles, sean confusas. Demostremos algo un poco menos evidente.

(vi). Demostremos una de las leyes Morgan: Sean $X, Y \subset T$, entonces

$$\overline{(X \cup Y)} = \overline{X} \cap \overline{Y}.$$

Como en los casos anteriores tendremos que demostrar el doble contenido:

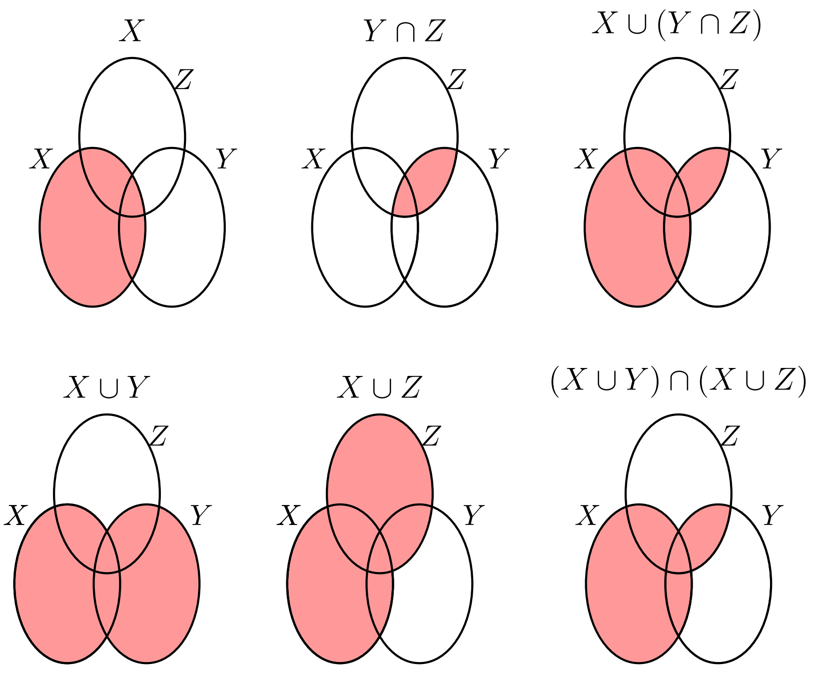
Sea $a \in \overline{(X \cup Y)}$. Por definición, a es un elemento de T que no es elemento de $X \cap Y$. Por tanto es un elemento de T que no es elemento de X ni elemento de Y. Como a no es elemento de X, $a \in \overline{X}$ y como a no es elemento de Y, $a \in \overline{Y}$. Por tanto $a \in \overline{X} \cap \overline{Y}$. Es decir,

$$\overline{(X \cup Y)} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}.$$

Sea $a \in \overline{X} \cap \overline{Y}$. Tenemos entonces que por definición de intersección, $a \in \overline{X}$ y $a \in \overline{Y}$ o lo que es lo mismo, $a \notin X$ y $a \notin Y$. Por lo tanto, $a \notin X \cup Y$ o lo que es lo mismo, $a \in \overline{(X \cup Y)}$. Lo que nos demuestra el otro contenido,

$$\overline{X} \cap \overline{Y} \subset \overline{(X \cup Y)}.$$

Veamos un ejemplo de demostración por diagramas de Venn: (iii). $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ Representamos por diagramas de Ven los tres conjuntos X, Y, Z:



Luego $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. El resto de la demostración no tiene mayor dificultad. ■

1.3. Conjuntos indexados

Normalmente tendremos que trabajar con más de dos conjuntos, posiblemente con una colección infinita, por tanto vamos a introducir la siguiente notación:

Definición 10 Cuando tengamos una familia de conjuntos, los nombraremos por letras (mayúsculas) con subíndices (**indexar**). Así, diremos: dada una familia de conjuntos X_i, con $i \in I$, (en donde I es un conjunto, llamado el conjunto de índices) lo que querrá decir que para cada elemento $i \in I$ tendremos el conjunto X_i.

Ejemplos E Consideremos para cada natural n los conjuntos

$$\begin{aligned} X_n : &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\} \\ Y_n : &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n\}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $X_7 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ o $X_{11} = \{1,2,3,\dots,10,11\}$. Mientras que $Y_7 = \{7,8,9,\dots\}$ e $Y_{1000} = \{1000,1001,1002,\dots\}$.

Definición 11 Dada una familia de conjuntos X_i, con $i \in I$ (conjunto de índices). Se define la **unión** de los X_i y se representa por $\bigcup_{i\in I} X_i$ a un nuevo conjunto que tiene por elementos los elementos que pertenecen a algún X_i. Es decir:

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{z \mid \exists^{\S} i \text{ con } \ z \in X_i\}$$

Definición 12 Dada una familia de conjuntos X_i, con $i \in I$. Se define la **intersección** de los X_i y se representa por $\bigcap_{i\in I} X_i$ a un nuevo conjunto que tiene los elementos que están en todos los X_i.

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{z \mid \forall^{\P} i,\ z \in X_i\}$$

Definición 13 Dada una familia finita de conjuntos no vacíos X_i, con $i = \{1,2,\dots,n\}$ se define el **producto cartesiano** de los X_i y se representa por $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ a un nuevo conjunto que tiene por elementos a todas las n-uplas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en donde cada $x_i \in X_i$ para $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \text{ para } i = 1,2,\dots,n\}$$

Ejemplos F Dados $A = \{1,2,a\}$, $B = \{a,b,c\}$ y $D = \{\alpha,\beta\}$,

$$\begin{aligned} A \times B \times C &= \{(1,a,\alpha),(1,b,\alpha),(1,c,\alpha),(2,a,\alpha),(2,b,\alpha),(2,c,\alpha), \\ &\quad (a,a,\alpha),(a,b,\alpha),(a,c,\beta),(1,a,\beta),(1,b,\beta),(1,c,\beta), \\ &\quad (2,a,\beta),(2,b,\beta),(2,c,\beta),(a,a,\beta),(a,b,\beta),(a,c,\beta)\} \end{aligned}$$

★ Los ejercicios del 1 al 5 de este tema pueden servirte para comprobar si has asimilado las nociones de esta sección.

2. Aplicaciones

2.1. Definiciones básicas

Definición 1 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Se define una **correspondencia** de X en Y, como un subconjunto $C \subset X \times Y$.

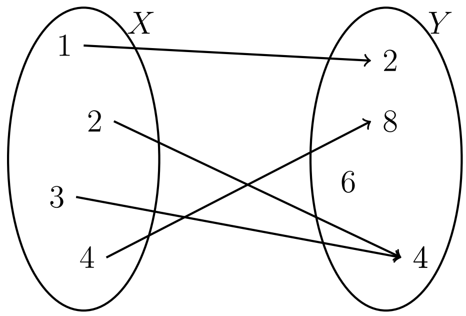
§∃: existe.
¶∀: para todo.

Definición 2 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Se define una **aplicación** f de X en Y, y se representa por $f : X \to Y$, como una correspondencia $F \subset X \times Y$ tal que para todo $x \in X$ existe un único $y \in Y$ con $(x, y) \in F$

$$\forall x \in X \quad \exists!\ y \in Y \quad | \quad (x, y) \in F^{\|}$$

Este elemento y no es más que lo que usualmente llamamos $f(x)$. Al conjunto X se le denomina el **dominio** de f y se representa por $\mathrm{Dom}(f)$. Al conjunto Y se le denomina el **codominio** de f y se representa por $\mathrm{CoDom}(f)$.

Ejemplos A Normalmente daremos una aplicación dando una regla que asigna a cada elemento de X un y sólo un elemento de Y. Podemos representar aplicaciones a partir de diagramas de Venn:



En este caso la aplicación f tiene dominio $X = \{1, 2, 3, 4\}$, codominio $Y = \{2, 4, 6, 8\}$ y consiste en el subconjunto $F = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 8)\} \subset X \times Y$. En este caso, f puede quedar representada por $f : X \to Y$ definida por $f(x) = -8 + 16x - 7x^2 + x^3$

Ejemplos B

$\star$ Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = 2n + 1$. En este caso la aplicación es el subconjunto $\{(n, 2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$\star$ Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y y_0 un elemento de Y. La **aplicación constante**: $f_{y_0} : X \to Y$ definida por $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$. En este caso la aplicación es el subconjunto $\{(x, y_0) \mid x \in X\}$.

$\star$ La **aplicación identidad**: $\mathrm{Id}_X : X \to X$ definida por $\mathrm{Id}_X(x) = x$ para todo $x \in X$. En este caso la aplicación es el subconjunto $\{(x, x) \mid x \in X\}$.

$\star$ Dada una aplicación $f : X \to Y$ y dado X' un subconjunto de X tenemos la **restricción de** f a X' como: $f|_{X'} : X' \to Y$ definida por $f|_{X'}(x) = f(x)$.

$\star$ Dada una aplicación $f : X \to Y$ y dado Y' un subconjunto de Y con $\mathrm{Im}(f) \subset Y'$ tenemos **restricción de** f a Y' como: $f|_{Y'} : X \to Y'$ definida por $f|_{Y'}(x) = f(x)$.

Definición 3 Diremos que dos aplicaciones f, g son **iguales** si $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$, $\mathrm{CoDom}(f) = \mathrm{CoDom}(g)$ y para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se tienen que $f(x) = g(x)$ (es decir, el subconjunto que las define es el mismo).

$\|$ $\forall$ para todo; $\exists$ existe; ! un único; $|$ tal que. En conjunto esta formula centrada se lee: para todo x perteneciente a X existe un único y perteneciente a Y tal que (x, y) pertenece a F

En el ejemplo A (Pag. 7) la aplicación f puede ser representada por

$$f : X \to Y \quad \text{con} \quad \begin{cases} f(x) = -8 + 16x - 7x^2 + x^3, & \text{o} \\ f(x) = 16 - 34x + 28x^2 - 9x^3 + x^4, \end{cases}$$

Ya que ambas definiciones de f tienen el mismo dominio, el mismo codominio y verifican que $f(1) = 2$, $f(2) = f(3) = 4$, y $f(4) = 8$, por lo que son la misma aplicación.

Definición 4 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación.

• Dado un subconjunto A de X se define la imagen de A por f y se denota por $f(A)$ como:

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subset Y$$

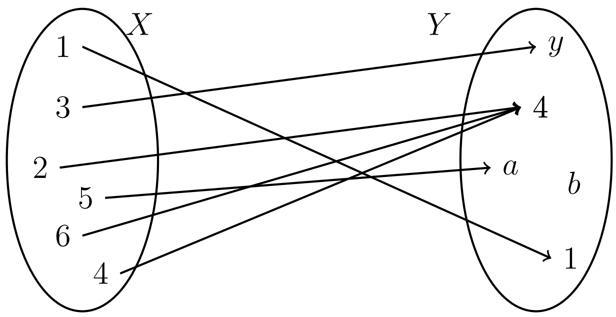
Se define la **imagen** de f como $\mathrm{Im}(f) := f(X)$.

Nota: Visto en diagramas de Venn, la imagen de f son los elementos de Y a los que les llega alguna flecha de algún elemento de X. Si miramos la aplicación dada en el ejemplo C (Pag. 8) (un párrafo abajo) la aplicación f tiene por imagen $\mathrm{Im}(f) := \{y, 4, a, 1\}$.

• Dado un subconjunto B de Y se define la **imagen inversa** de B por f y se denota por $f^{-1}(B)$ como:

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$$

Ejemplos C *Consideremos la aplicación:*



Tenemos entonces que

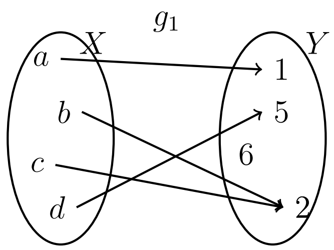
$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,y\}, \quad f(\{2,4,6\}) = \{4\}, \quad f(\{4,5\}) = \{4,a\}$$
$$f^{-1}(\{b\}) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{4\}) = \{2,4,6\}, \quad f^{-1}(\{a,4,y\}) = \{2,3,4,5,6\}$$

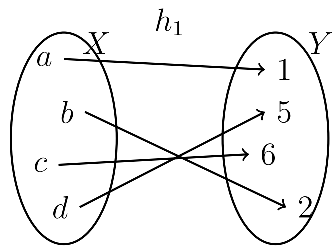
Nota: Dada una aplicación $f : X \to Y$ acabamos de definir dos aplicaciones:

$$\Phi_f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y) \text{ definida por } \Phi_f(A) := f(A)$$
$$\Psi_f : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X) \text{ definida por } \Psi_f(B) := f^{-1}(B)$$

Definición 5 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Diremos que f es:

• **inyectiva**: Si para todo par de elementos $x, y \in X$, con $x \neq y$, se tiene que $f(x) \neq f(y)$. Es decir, dos elementos distintos de X no pueden ir a para al mismo sitio. Esta noción es bastante clara cuando usamos diagramas de Venn:





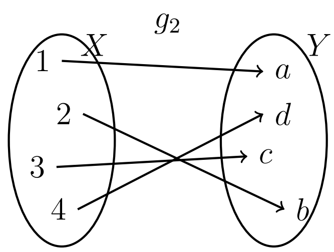
La aplicación g_1 no es inyectiva, ya que al elemento 2 de Y le llegan dos flechas (b y c son dos elementos distintos de X que tienen por imagen el 2. La aplicación h_1 si es inyectiva, a ningún elemento de Y le llegan dos flechas).

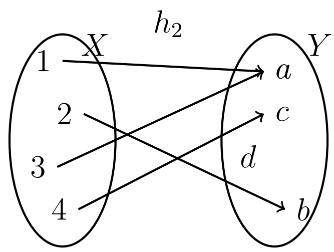
Nota: la inyectividad significa que dos elementos distintos van a parar a sitios distintos, o lo que es lo mismo, que un elemento de Y no puede ser imagen de dos elementos de X. Por tanto, para demostrar que una aplicación f es inyectiva se supondrá que hay "dos" elementos $x, x' \in X$ tales que $f(x) = f(x')$ y se demostrará que $x = x'$. Estamos usando la equivalencia de los enunciados:

$$\text{si p entonces q} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{si no q entonces no p}$$

en donde p es "x es distinto de x'" , q es "$f(x)$ es distinto de $f(x')$" y por tanto, no p es x es igual a x' y no q es $f(x)$ es igual que $f(x')$.

• **sobreyectiva**: si para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Es decir, todo elemento de Y es imagen de algún elemento de X. Al igual que con la noción de inyectividad, la sobreyectividad es bastante clara usando diagramas de Venn:





La aplicación g_2 es sobreyectiva, ya que a todo elemento de Y le llega una flecha. La aplicación h_2 no es sobreyectiva, ya que d no es imagen de ningún elemento de X (a d no le llega ninguna flecha).

• **biyectiva**: si es a la vez inyectiva y sobreyectiva. Las aplicaciones h_1 y g_2 son biyectivas, ya que a cada elemento de Y le llega una y sólo una flecha de X.

Lema 6 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Entonces:

(i) f es sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{Im}(f) = Y$.

(ii) La restricción de una aplicación f a su imagen, $f|_{\mathrm{Im}(f)} : X \to \mathrm{Im}(f)$ es una aplicación sobreyectiva.

(iii) Si $f : X \to Y$ es inyectiva y X' es un subconjunto de X, entonces $f|_{X'} : X' \to Y$ es también inyectiva.

Demo: Los tres apartados son obvios. ■

Ejemplos D

⋆ La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ es biyectiva.

⋆ La aplicación $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 2x + 1$ es sólo inyectiva. No existe ningún natural n tal que $f(n) = 4$.

⋆ La aplicación $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva. $h(2) = h(-2)$ por lo que no es inyectiva y no existe ningún elemento $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -1$, por lo que no es sobreyectiva.

2.2. Composición de aplicaciones

Definición 7 Sean X, Y, Z tres conjuntos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones. Se define la **composición** de f con g y se representa por $g \circ f$ como la aplicación

$$g \circ f : X \to Z \quad \text{definida por } g \circ f(x) := g(f(x)) \quad \forall\, x \in X$$

Teorema 8 Sean X, Y, Z y T cuatro conjuntos no vacíos y consideremos

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z, \quad h : Z \to T$$

tres aplicaciones. Entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Demo: Es una mera comprobación: El dominio de ambas aplicaciones es X y el codominio de ambas aplicaciones es T. Es más, dado cualquier $x \in X$ se tiene que,

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \\ (h \circ g) \circ f(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \end{aligned}$$

Luego las aplicaciones $h \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ f$ coinciden para todo $x \in X$, lo que demuestra que son la misma aplicación, ver definición 3 (Pag. 7). ■

Nota: La composición de aplicaciones no tiene que verificar la propiedad conmutativa. Es más, si dominio y codominio no son el mismo conjunto no tiene sentido esta pregunta, e incluso si X un conjunto no vacío y $f, g : X \to X$ son dos aplicaciones no tiene que verificarse que $f \circ g = g \circ f$.

Lema 9 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación.

(i) Si Id_Y denotan la aplicación identidad en Y, entonces $\mathrm{Id}_Y \circ f = f$.

(ii) Si Id_X denotan la aplicación identidad en X, entonces $f \circ \mathrm{Id}_X = f$.

Demo: Los dos apartados son obvios. ■

Proposición 10 Sean X, Y y Z tres conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos aplicaciones. Entonces:

(i) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

(ii) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva. (ejercicio)

(iii) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva. (ejercicio)

(iv) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

(v) f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Demo:

(i). Supongamos que f y g son dos aplicaciones inyectivas y consideremos $x_1, x_2 \in X$ tales que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ (tenemos que demostrar, para ver que $g \circ f$ es inyectiva, que $x_1 = x_2$). Por definición

$$g(f(x_1)) = g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = g(f(x_2))$$

por tanto, como g es inyectiva, $f(x_1) = f(x_2)$ y como f es inyectiva $x_1 = x_2$.

(iv). Supongamos que $g \circ f : X \to Z$ es una aplicación sobreyectiva y veamos que $g : Y \to Z$ es también sobreyectiva. Dado $z \in Z$ tenemos que encontrar un $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Como $g \circ f$ es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. Por tanto, $y = f(x)$ es el elemento que buscamos:

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z$$

(v) es corolario de (i) y (ii). ■

Proposición 11 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Entonces,

(i) f es sobreyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = Id_Y$. Es más, si g es única, f es biyectiva.

(ii) f es inyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Es más, si g es única, f es biyectiva o $\#X = 1$ **.

Demo: (i) Si existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, por la proposición 10(iv) (Pag. 10), f es sobreyectiva (ya que la aplicación Id_Y es sobreyectiva). Supongamos ahora que $f : X \to Y$ es una aplicación sobreyectiva (para terminar de demostrar el apartado tenemos que construir una aplicación $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$). Dado $y \in Y$ como f es sobreyectiva, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Por tanto para cada $y \in Y$ elegimos un $x \in f^{-1}(\{y\})$ y definimos $g : Y \to X$ como

$$g(y) = x \quad \text{siendo } x \text{ el elemento elegido anteriormente en } f^{-1}(\{y\}).$$

Tenemos entonces que $f \circ g(y) = f(g(y)) = y$ (ya que por construcción $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$. Es más como la elección de $x \in f^{-1}(\{y\})$ es arbitraria, si existe un $y \in Y$ tal que el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ tiene más de un elemento, entonces podemos definir más de una g, en caso contrario, si para todo $y \in Y$ el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ tiene un elemento, la aplicación es inyectiva, ver el ejercicio 13 (Pag. 24).

**ver la definición 3 (Pag. 21)

(ii) Si existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, por la proposición 10(iii) (Pag. 10), f es inyectiva (ya que la aplicación Id_X es inyectiva). Supongamos ahora que $f : X \to Y$ es una aplicación inyectiva (para terminar de demostrar el apartado tenemos que construir una aplicación $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$). Sea $\mathrm{Im}(f)$ la imagen de f y consideremos $Y = \mathrm{Im}(f) \cup \overline{\mathrm{Im}(f)}$ (Y queda partido en dos trozos, por un lado la imagen de f y por el otro lo que falta, el complemento de la imagen). Por último elegimos un elemento arbitrario de X, llamándolo x_0. Definimos entonces la aplicación g. Dado $y \in Y$:

$$g(y) := \begin{cases} x, & \text{si } y \in \mathrm{Im}(f) \text{ donde x es el único elemento de } X \text{ tal que } f(x) = y; \\ x_0, & \text{si } y \notin \mathrm{Im}(f). \end{cases}$$

Tenemos entonces que $g \circ f(x) = g(f(x))$ y por como hemos definido g, como $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, $g(f(x))$ es el único elemento de X, llamémoslo a, tal que $f(a) = f(x)$ es decir, $g(f(x)) = x$. Por último, observar que si $\#X > 1$ y f no es sobreyectiva, es decir, $\mathrm{Im}(f) \neq Y$ (o equivalentemente $\overline{\mathrm{Im}(f)} \neq \emptyset$) podemos definir más de una g (cada vez que cambiamos el x_0 [por hipótesis hay más de uno] tenemos una nueva g que verifica la tesis). ■

Teorema 12 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) f es biyectiva.

(ii) Existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ y $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Es más, g es única, que denotaremos por f^{-1}. En este caso se dice que f es **inversible** con inversa f^{-1}.

Demo: Supongamos que estamos en las condiciones de (ii). Entonces por la proposición 11(i) (Pag. 11) f es sobreyectiva, ya que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ y por la proposición 11(ii) (Pag. 11) f es inyectiva, ya que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Por tanto f es biyectiva. Supongamos ahora que f es biyectiva. Entonces, como f es sobreyectiva, por la proposición 11(i) (Pag. 11) existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ y como f es inyectiva, por la proposición 11(ii) (Pag. 11) existe una aplicación $g' : Y \to X$ tal que $g' \circ f = \mathrm{Id}_X$ (nadie nos asegura en principio que tengan que ser la misma). Por último,

$$g' = g' \circ \mathrm{Id}_X = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = \mathrm{Id}_Y \circ g = g$$

Es más, la identidad anterior nos demuestra que g es única. ■

Proposición 13 Sean X, Y y Z tres conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones biyectivas. Entonces $g \circ f$ es biyectiva, por tanto inversible con inversa,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Demo: Comprobemos simplemente que $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$. Tendremos entonces que $g \circ f$ es biyectiva por el Teorema 12 (Pag. 12).

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_Y \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X \\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_X \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_Y .\end{aligned}$$

Lo que demuestra la proposición. ■

Nota: Dados dos conjuntos no vacíos X, Y y una aplicación $f : X \to Y$ NO SE DEBE CONFUNDIR la imagen inversa de un subconjunto B de Y por f, denotado por $f^{-1}(B)$, con la inversa de la aplicación (QUE SÓLO EXISTIRÁ SI f ES BIYECTIVA).

★ Los ejercicios del 7 al 18 de este tema pueden servirte para comprobar si has asimilado las nociones de esta sección.

3. Relaciones

Definición 1 Se define una **relación** en un conjunto no vacío X, y se denota por $\mathcal{R}$, como cualquier subconjunto del producto cartesiano $X \times X$. Si un elemento $(a, b) \in \mathcal{R}$ diremos que a está relacionado con b y lo denotaremos por $a \mathcal{R} b$.

Ejemplos A

⋆ En el conjunto de los números naturales definimos la relación "ser menor o igual que", es decir, diremos $n \mathcal{R} m$ si y sólo si $n \leq m$. Así, $3 \mathcal{R} 5$ si están relacionados, mientras que $5 \mathcal{R} 2$ no.

⋆ Podemos considerar, en el conjunto de los seres humanos, la relación "ser hermano de".

Definición 2 Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación en X. Diremos que $\mathcal{R}$ verifica la propiedad:

- **Reflexiva:** Para todo $x \in X$, se tiene que $x \mathcal{R} x$.
- **Transitiva:** Si $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z$, entonces $x \mathcal{R} z$.
- **Simétrica:** Si $x \mathcal{R} y$, entonces $y \mathcal{R} x$.
- **Antisimétrica:** Si $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x$, entonces $x = y$.

Ejemplos B *Consideremos las siguientes relaciones:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &:= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ divide a } y\} \\
\mathcal{R}' &:= \{(x, x+1) \mid \text{ con } x \in \mathbb{N}\} \\
\mathcal{R}'' &:= \{(1,1), (2,2), (a,a), (1,a), (a,1)\} \text{ en } A = \{1, 2, a\}
\end{aligned}$$

Entonces: $\mathcal{R}$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica (no es simétrica). $\mathcal{R}'$ verifica solamente la propiedad antisimétrica. $\mathcal{R}''$ es reflexiva, transitiva y simétrica (no es antisimétrica).

3.1. Relación de equivalencia.

Definición 3 Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación en X. Diremos que $\mathcal{R}$ es una **relación de equivalencia** si verifica las propiedades reflexiva, transitiva y simétrica.

Ejemplos C (La relación de Congruencia) Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros y sea $n \in \mathbb{Z}$. Definimos la relación

$$a\mathcal{R}b \iff a - b = \dot{n} \quad (a - b \text{ es multiplo de } n)$$

Tenemos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, llamada la **relación de congruencia modulo** n. Esta relación se denota de forma especial. Así, si dos enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ están relacionados se denotará por $a \equiv b \pmod n$.

Demo: Veamos que la relación de congruencia verifica las propiedades reflexiva, transitiva y simétrica:

(i). Reflexiva: dado $x \in \mathbb{Z}$, tenemos que $x - x = 0 \cdot n$ por lo que $x \equiv x (\mathrm{mod}\, n)$.

(ii). Transitiva: Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tales que $x \equiv y \pmod n$ e $y \equiv z \pmod n$. Tenemos entonces que existe un $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = \alpha n$ y existe un $\beta \in \mathbb{Z}$ tal que $y - z = \beta n$. Por tanto

$$x - z = (x - y) + (y - z) = \alpha n + \beta n = (\alpha + \beta)n.$$

Luego $x \equiv z (\mathrm{mod}\, n)$.

(iii). Simétrica: Sean $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $x \equiv y (\mathrm{mod}\, n)$. Por definición existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = \alpha n$. Así, $y - x = (-\alpha)n$ y por tanto $y \equiv x (\mathrm{mod}\, n)$. ■

Ejemplos D *Sean X, Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Entonces la relación $a\mathcal{R}b \iff f(a) = f(b)$ es de equivalencia.* *(Ejercicio)*

La siguiente definición nos va a permitir construir nuevos ejemplos de relaciones de equivalencia. Como veremos al final de esta sección, cualquier relación de equivalencia será de este tipo.

Definición 4 Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{P}$ es una **partición** de X si:

- Para todo $i \in I$, se tiene que $A_i \neq \emptyset$.
- Dados $i, j \in I$, con $i \neq j$, se tiene que $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.

Teorema 5 Sea X un conjunto no vació y sea $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i \in I}$ una partición en X. Entonces la relación $x\mathcal{R}y$ si y sólo si x, y están en un mismo trozo de la partición, es decir,

$$x\mathcal{R}y \iff \exists\, i \in I \mid x, y \in A_i,$$

es una relación de equivalencia en X.

Demo: Veamos que $\mathcal{R}$ verifica las propiedades reflexiva, transitiva y simétrica:

(i). Reflexiva: dado $x \in X$, por la propiedad tercera de la definición de partición se tiene que $x \in X = \cup_{i \in I} A_i$ por tanto existe un $i \in I$ tal que $x \in A_i$ y así, $x\mathcal{R}x$.

(ii). Transitiva: Sean $x, y, z \in X$ tal que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$. Por definición, existe $i \in I$ tal que $x, y \in A_i$ y existe un $j \in I$ tal que $y, z \in A_j$. Por tanto $y \in A_i \cap A_j$ y por la propiedad segunda de la definición de partición $i = j$. Así, $x, y, z \in A_i (= A_j)$, y por tanto $x\mathcal{R}z$.

(iii). Simétrica: Sean $x, y \in X$ tales que $x\mathcal{R}y$. Por definición existe $i_0 \in I$ tal que $x, y \in A_{i_0}$ y por tanto $y\mathcal{R}x$. ■

Ejemplos E *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{P}$ una partición en X. Entonces, el teorema anterior nos permite asociar una relación de equivalencia a la partición $\mathcal{P}$ que se denotará por $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$.*

Desde este momento, hasta el final de la sección vamos a demostrar que toda relación de equivalencia es de este tipo. Es decir, si tenemos una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en un conjunto no vacío X podemos construir una partición $\mathcal{P}$ en X tal que $\mathcal{R}$ es exactamente la relación de equivalencia asociada a $\mathcal{P}$.

Definición 6 Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Dado un elemento $x \in X$ definimos la **clase de equivalencia** de x y la representamos por $[x]$ o $\overline{x}$ como el conjunto:

$$\overline{x} = \{y \in X \mid x \,\mathcal{R}\, y\} \subset X$$

Nota: Observar que la propiedad reflexiva nos asegura que $x \in \overline{x}$.

El conjunto de todas las clases de equivalencia de una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X se le llamará el **conjunto cociente** de X respecto de $\mathcal{R}$ y se denotará por $X/\,\mathcal{R}$ o $X/_{\approx}$

Ejemplos F $\star$ Consideremos la relación de congruencia $\bmod 3$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod 3\} = \{3x \qquad x \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots\} \\
\overline{1} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod 3\} = \{3x+1 \quad x \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, \cdots\} \\
\overline{2} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2 \pmod 3\} = \{3x+2 \quad x \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -4, -1, 2, 5, 8, \cdots\}
\end{aligned}$$

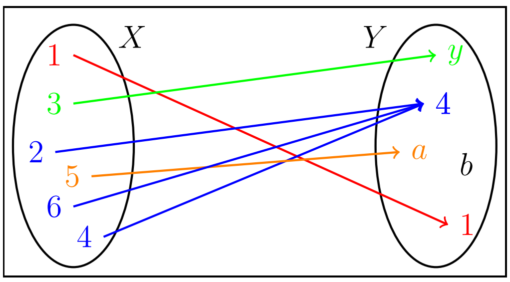
Observar que $\overline{0} = \overline{3} = \overline{6} =$etc y que los subconjuntos $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ son una partición de $\mathbb{Z}$.

$\star$ Sea $A = \{1, 2, a\}$ y $\mathcal{R}= \{(1,1), (2,2), (a,a), (1,a), (a,1)\}$. Entonces $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y $A/_{\approx} = \{\{1, a\}, \{2\}\}$ (observar que forman una partición de X).

$\star$ Sean X, Y dos conjuntos no vacíos, $f : X \to Y$ una aplicación y consideremos la relación de equivalencia en X: $a\mathcal{R}b \iff f(a) = f(b)$. Entonces, para todo $a \in X$,

$$\overline{a} = \{x \in X \mid f(x) = f(a)\} = f^{-1}(f(a))$$

Aunque pueda ser aquí un poco más difícil de visualizar, nos encontramos otra vez con que el conjunto cociente es un realidad una partición de X. Por ejemplo, si consideramos la aplicación dada en el ejemplo C (Pag. 8),



Tenemos que el conjunto cociente respecto de esta relación es $X/_{\approx} = \{\{1\}, \{2, 4, 6\}, \{3\}, \{5\}\}$. Observar que, en este caso también, se trata de una partición del conjunto X.

Teorema 7 Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Entonces la familia de las clases de equivalencia de elementos de X es una partición de X, denotada por $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$. Es más,

(i) Para todo $x \in X$ se tiene que $x \in \overline{x}$.

(ii) $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $x \in \overline{y}$ ($\iff$ $y \in \overline{x}$).

(iii) $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $\overline{x} = \overline{y}$.

(iv) $x\mathcal{R}y$ si y sólo si existe $z \in X$ tal que $x, y \in \overline{z}$.

Observar que (iv) lo que dice es que la relación $\mathcal{R}$ es la relación de equivalencia asociada a la partición $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$.

Demo: Vamos a demostrar los cuatro apartados, ya que ellos nos demostraran el teorema.

(i). Por la propiedad reflexiva $x\mathcal{R}x$, por lo que por definición $x \in \overline{x} = \{y \in X \mid x\mathcal{R}y\}$.

(ii). Este apartado más bien es un recordatorio, ya que $x\mathcal{R}y$, si y sólo si $y \in \overline{x}$ (por simetría, $x \in \overline{y}$).

(iii). Supongamos que $x\mathcal{R}y$ y veamos que $\overline{x} = \overline{y}$. Veamos ambos contenidos: sea $z \in \overline{x}$, entonces $x\mathcal{R}z$. Por la propiedad simétrica, $z\mathcal{R}x$ y como tenemos $x\mathcal{R}y$, la propiedad transitiva nos demuestra que $z\mathcal{R}y$ es decir, $z \in \overline{y}$. De forma similar, si $z \in \overline{x}$ se tiene que $z \in \overline{y}$, por lo que $\overline{x} = \overline{y}$.

Supongamos ahora que $\overline{x} = \overline{y}$. Entonces, por (i), $x \in \overline{x} = \overline{y}$ y por tanto, ver (ii), $x\mathcal{R}y$.

(iv) Supongamos que $x\mathcal{R}y$, entonces, por (i) y (iii), $x, y \in \overline{x} = \overline{y}$. Supongamos ahora que existe un $z \in X$ tal que $x, y \in \overline{z}$. Entonces, $x\mathcal{R}z$ y $y\mathcal{R}z$. Por tanto, aplicando la propiedad simétrica, $x\mathcal{R}z$ y $z\mathcal{R}y$ y por la transitiva, $x\mathcal{R}y$.

Por último, para cada $x \in X$, $x \in \overline{x}$ por lo que $\overline{x} \neq \emptyset$. Por otro lado, si $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$, existe $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$ y por tanto, por (ii), $z \cap Rx$ y $z \cap Ry$ por lo que por (iii), $\overline{x} = \overline{z} = \overline{y}$. Claramente se tiene que $\bigcup_{x \in X} \overline{x} = X$. Lo que demuestra que las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$ definen una partición en X y (iv) demuestra que $\mathcal{R}$ es la relación asociada a esta partición. ■

Nota: Este teorema nos demuestra que los conceptos de partición y relación de equivalencia son el mismo. Es decir, si tenemos una relación de equivalencia la podemos ver como una partición y si tenemos una partición la podemos ver como una relación de equivalencia.

Nota: Observar que por el apartado 3 del teorema anterior si $x\mathcal{R}y$, $\overline{x} = \overline{y}$, es decir, que el subconjunto $\overline{x} \subset X$ también se puede representar por $\overline{y}$. Por tanto, un mismo elemento del conjunto cociente $X/_{\approx}$ se podrán nombrar usando distintos representantes. Por ejemplo, si consideramos la relación de congruencia modulo 3, tenemos que el conjunto cociente es

$$\mathbb{Z}/\bmod n = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\} = \{\overline{10}, \overline{29}, \overline{99}\}$$

Ya que $1 \equiv 10 \pmod 3$ y por tanto $\overline{1} = \overline{10}$, $2 \equiv 29 (\bmod 3)$ y por tanto $\overline{2} = \overline{29}$ y $3 \equiv 99 \pmod 3$ y por tanto $\overline{3} = \overline{99}$. Como veremos más adelante esta posibilidad de representar los elementos del conjunto cociente de distintas maneras nos obligara a ser muy precavidos cuando trabajemos con estos conjuntos.

Definición 8 Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Recordamos que el conjunto cociente de X respecto de $\mathcal{R}$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de X (que acabamos de demostrar forman una partición de X. Este conjunto cociente lo denotamos por $X/\mathcal{R}$ o $X/_{\approx}$

Definición 9 Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Se define la **aplicación canónica** de X en $X/_{\approx}$ como la aplicación $\pi : X \to X/_{\approx}$ definida por $\pi(x) = \overline{x}$.

Corolario 10 Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Sea $X/\mathcal{R}$ el conjunto cociente y $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la proyección canónica al cociente. Entonces para todo $x, y \in X$ se tiene que

$$x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad \pi(x) = \pi(y)$$

Por lo que $\mathcal{R}$ también puede verse como la relación asociada a la aplicación canónica.

Demo: Es el apartado (iii) del teorema anterior. ■

3.2. Relación de orden.

Definición 11 Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación en X. Diremos que $\mathcal{R}$ es una **relación de orden** si verifica las propiedades reflexiva, transitiva y antisimétrica. Normalmente denotaremos las relaciones de orden por el signo $\leq$ y diremos que el par $(X, \leq)$ es un **conjunto ordenado**.

Ejemplos G

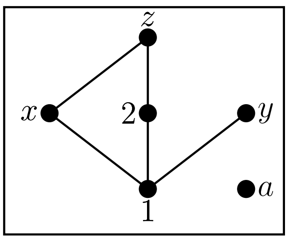
⋆ Considerar la relación de "mayor o igual" o "menor o igual" en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$.

⋆ Sea X un conjunto. Entonces $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un conjunto ordenado.

⋆ Sea $A = \{1, 2, a, x, y, z\}$ entonces la relación siguiente es una relación de orden en A,

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (a,a), (x,x), (y,y), (z,z), (1,2), (1,x), (1,z), (2,z), (1,y), (x,z)\}.$$

Observación: Podemos representar las relaciones de orden usando **grafos**, en donde una linea entre dos elementos de distinta altura significa que están relacionados y el elemento de más altura es el mayor. Así, la relación de orden anterior queda representada por el grafo:
Observar: a no está relacionado con ningún otro elemento de A.



Definición 12 Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Diremos que dos elementos $x, y \in X$ son **comparables** si $a \leq b$ o $b \leq a$. En caso contrario diremos que son **no comparables**.

Por ejemplo en la relación de orden dada en el ejemplo G ($\star_3$) (Pag. 17) se tiene que 2 y x no son comparable. Es más, el elemento b sólo es comparable consigo mismo.

Definición 13 Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Diremos que $\leq$ es un **orden total** si dos elementos cualesquiera de X son comparables.

Definición 14 (Elementos Notables en un conjunto ordenado). Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y sea $Y \subset X$.

• Se define una **cota superior** o **mayorante** para Y como cualquier elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in Y$, $y \leq x$.

$$x \in X \text{ es una cota superior} \iff \forall\, y \in Y, \quad y \leq x.$$

• Se define una **cota inferior** o **minorante** para Y como cualquier elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in Y$, $x \leq y$.

$$x \in X \text{ es una cota inferior} \iff \forall\, y \in Y, \quad x \leq y.$$

• Se define el **supremo** para Y, y se denota por $\mathrm{Sup}(Y)$, como la menor de las cotas superiores.

$$x = \mathrm{Sup}(Y) \iff \quad x \text{ es cota superior y } \forall z \text{ cota superior } \ x \leq z.$$

Cuando el supremo pertenece a Y se le denomina **máximo** y se le denota por $\mathrm{Max}(Y)$

• Se define el **ínfimo** para Y, y se denota por $\inf(Y)$, como la mayor de las cotas inferiores.

$$x = \mathrm{Inf}(Y) \iff \quad x \text{ es cota inferior y } \forall z \text{ cota inferior } \ z \leq x.$$

Cuando el ínfimo de Y pertenece a Y se le denomina **mínimo** y se le denota por $\mathrm{Min}(Y)$.

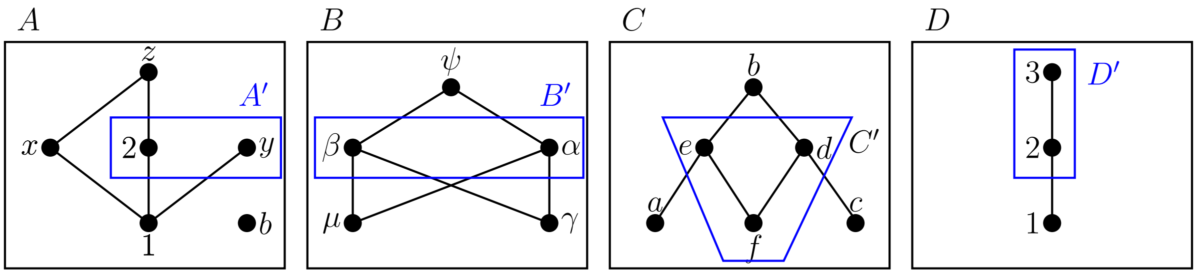
• Se dice que un elemento $y \in Y$ es un **elemento maximal** de Y si no existe otro elemento en Y mayor que él. Es decir,

$$y \in Y \text{ es un elemento maximal} \iff \forall\, z \in Y \mid y \leq z \Rightarrow z = y$$

• Se dice que un elemento $y \in Y$ es un **elemento minimal** si no existe otro elemento en Y menor que él. Es decir,

$$y \in Y \text{ es un elemento minimal} \iff \forall\, z \in Y \mid z \leq y \Rightarrow z = y$$

Ejemplos H *Consideremos los siguientes conjuntos ordenados, A, B, C, D (con los ordenes dados por los grafos respectivos) y los subconjuntos A', B', C', D'.*



Entonces los elementos notables en A', B', C', D' son:

	Cot. Sup.	*Sup.*	*Máx.*	*E. Max.*	*Cot. Inf.*	*Ínf*	*Mín.*	*E. Min*
A'	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2, y\}$	1	1	$\emptyset$	$\{2, y\}$
B'	ψ	ψ	$\emptyset$	$\{\beta, \alpha\}$	$\{\mu, \gamma\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\beta, \alpha\}$
C'	b	b	$\emptyset$	$\{e, d\}$	$\{f\}$	$\emptyset$	f	$\{f\}$
D'	3	$\emptyset$	3	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\emptyset$	2	$\{2\}$

Definición 15 Se dice que un conjunto ordenado $(X, \leq)$ es un **retículo** si para todo par de elementos $a, b \in X$ existe $\mathrm{Sup}(\{a, b\})$.

Ejemplos I

⋆ *de los conjuntos ordenados A, B, C, D sólo C y D son retículos. Ya que en A no existe el supremo de $\{2, y\}$ y en B no existe el supremo de $\{\mu, \gamma\}$.*

⋆ *Si X es un conjunto y sea $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ el conjunto ordenado "partes de X" con la relación de orden "contenido", ver el ejemplo G ($\star_2$) (Pag. 17). Entonces el supremo de dos elementos $A, B \subset X$ es $A \cup B$ (por tanto $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo). Mientras que el ínfimo de dos elementos $A, B \subset X$ es $A \cap B$.*

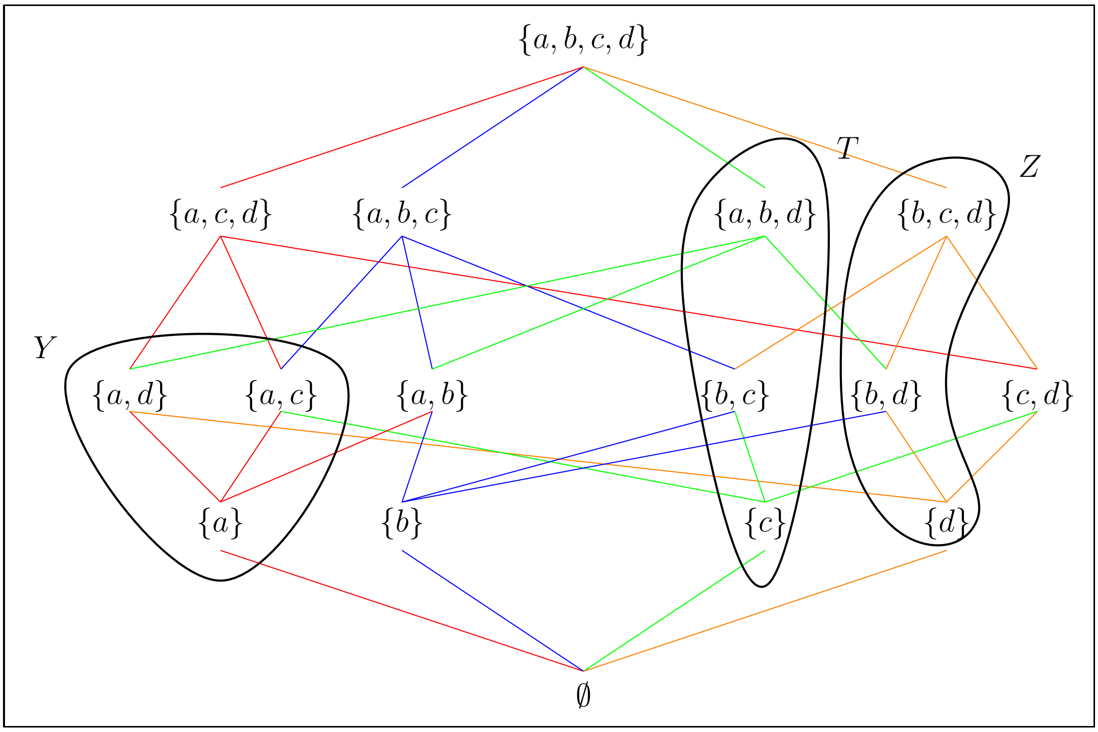
Definición 16 Se dice que un conjunto ordenado $(X, \leq)$ posee un **buen orden** si todo subconjunto no vacío de X posee un elemento mínimo.

• Los Naturales con su orden usual, $(\mathbb{N} \leq)$, es un conjunto ordenado que posee un buen orden.

Definición 17 Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Un subconjunto Y de X es una **cadena** si está totalmente ordenado, es decir, cualquier par de elementos de Y son comparables.

Ejemplos J Consideremos $X = \{a, b, c, d\}$ y sea $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ el conjunto ordenado "partes de X" con la relación de orden "contenido". Sean

$$Y := \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}, \ Z := \{\{d\}, \{b, d\}.\{b, c, d\}\}, \ T := \{\{c\}, \{b, c\}, \{a, b, d\}\}.$$



Tenemos entonces:

- ⋆ Z es una cadena en $\mathcal{P}(X)$, mientras que Y y Z no lo son.

- ⋆ Las cotas superiores de Z son $\{b, c, d\}$ y X. Tiene máximo, $\text{Max}(Z) = \{b, c, d\}$. Las cotas inferiores de Z son $\{d\}$ y $\emptyset$, El ínfimo de Z es su mínimo, $\text{Min}(Z) = \{d\}$. Es más, $\{d\}$ es el único elemento minimal de Z, mientras que $\{b, c, d\}$ es su único elemento maximal.

- ⋆ Las cotas superiores de Y son $\{a, c, d\}$ y X. Tiene supremo, $\text{Sup}(Y) = \{a, c, d\}$, que no es máximo. Las cotas inferiores de Y son $\{a\}$ y $\emptyset$, El ínfimo de Y es su mínimo, $\text{Min}(Y) = \{a\}$. Es más, $\{a\}$ es el único elemento minimal de Y, mientras que $\{a, c\}$ y $\{a, d\}$ son elementos maximales.

- ⋆ La cota superior de T es X. Tiene supremo, $\text{Sup}(T) = X$, que no es máximo. La cota inferior de T es $\emptyset$, El ínfimo de T es $\text{Inf}(T) = \emptyset$. Es más, $\{c\}$ y $\{a, b, d\}$ son elementos minimales, mientras que $\{b, c\}$ y $\{a, b, d\}$ son maximales.

Definición 18 Se dice que un conjunto ordenado $(X, \leq)$ es **inductivo** si toda cadena de X admite una mayorante.

Lema 19 (Lema de Zorn) Todo conjunto inductivo posee elementos maximales.

El Lema de Zorn es un axioma, por lo que no es demostrable. No hay conformidad total, en el mundo matemático, a la hora de aceptar este axioma: hay matemáticos que lo aceptan (y lo usan) y otros que no. El no aceptarlo conlleva ciertas consecuencias: no es posible demostrar, sin el axioma de Zorn, que todo espacio vectorial posea una base (no obstante, nadie ha encontrado hasta el momento una base para el espacio vectorial de las sucesiones reales, o una base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ espacio vectorial). Si está demostrado que el Lema de Zorn es equivalente a los siguientes resultados:

Lema 20 (Principio de elección) Dada una familia no vacía de conjuntos no vacíos $\{X_i\}$ con $i \in I$, es posible elegir un elemento de cada conjunto. O lo que es equivalente, el producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío (aunque en este momento no sepáis que es un producto cartesiano de un producto infinito de conjuntos).

Lema 21 (Lema de Zermelo) Todo conjunto no vació admite un buen orden.

Hago notar que nadie ha sabido dar una estructura de buen orden en el conjunto de los Números Reales. No obstante, este resultado permite usar el llamado **principio de inducción transfinito**, por tanto, quien no acepte el lema de Zorn, no puede usar dicho principio.

★ Los ejercicios del 19 al 27 de este tema pueden servirte para comprobar si has asimilado las nociones de esta sección.

4. Cardinales

Cuando contamos los elementos de un conjunto X con n elementos, lo que hacemos (por si no nos hemos dado cuenta) es ponerlo en correspondencia biyectiva con el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. En este caso diremos que X es un conjunto con n elementos o que tiene cardinal n. Cuando el conjunto es infinito la noción "tener el mismo número de elementos" se complica un poco:

Podríamos pensar que el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, tiene "más" elementos que el conjunto de los número naturales que son pares, vamos a denotar este conjunto por $\mathbb{P}$. No obstante, la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ definida por $f(n) = 2n$ es biyectiva (lo que nos hace suponer que tienen el mismo número de elementos.

Definición 1 Se dice que dos conjuntos X e Y son **equipotentes** si existe una aplicación biyectiva $f : X \to Y$.

Lema 2 La relación "ser equipotente a" verifica las propiedades reflexiva, transitiva y simétrica.

Nota: Queremos definir el cardinal de un conjunto, con la idea de que dos conjuntos X e Y tienen el mismo cardinal si son equipotentes (existe una biyección $f : X \to Y$). Es decir, si pertenecen a la misma clase de equivalencia de la relación "ser equipotente a".

Definición 3 Se define el cardinal de un conjunto X y se denota por $|X|$ o $\#X$ como la clase de equivalencia de X en la relación "ser equipotente a" (es decir, como la clase de todos los conjuntos que son equipotentes a X).

Nota: Observar que con esta definición dos conjuntos tienen el mismo cardinal si y sólo si son equipotentes.

Alguna de estas clases de equivalencia tienen nombre propio:

- El cardinal del conjunto vacío se denota por 0.
- Diremos que un conjunto no vació X es **finito** de cardinal n si X es equipotente al conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, denotado por $|X| = n$. En caso contrario diremos que X es de cardinal **infinito**, denotado por $|X| = \infty$.
- El cardinal de los números Naturales se representa por $\aleph_0$, que se lee aleph sub cero.
- El cardinal de los números Reales se denota por $\aleph_1$, que se lee aleph sub uno.

Nota: Se vera en ejercicios que el cardinal de los números racionales, aunque en principio pueda sorprender, es $\aleph_0$. No obstante, no hay un único cardinal infinito, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ no son equipotentes.

Proposición 4 Sea X un conjunto finito y $f : X \to X$ una aplicación. Entonces:

(i) Si f es inyectiva, entonces es sobreyectiva.

(ii) Si f es sobreyectiva, entonces es inyectiva. (ejercicio)

Demo: (i) Supongamos que f es inyectiva. Dado $x \in X$ consideramos el conjunto

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\} \subset X$$

como todos estos elementos no pueden ser distintos, ya que X es finito, existen $n, m \in \mathbb{N}$, podemos suponer $n < m$, tal que $f^n(x) = f^m(x)$. Pero si $n \geq 1$,

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(f^{m-1}(x)) = f^m(x)$$

lo que implica, al ser f inyectiva, que $f^{n-1}(x) = f^{m-1}(x)$. Reiterando este proceso vamos reduciendo la potencia de f por lo que obtenemos $f(x) = f(m-n+1)(x)$ y por tanto, aplicando una vez más que f es inyectiva, $x = f^{m-n}(x)$. Por último como $m - n > 0$, $f(f^{m-n-1}(x)) = x$ lo que demuestra que x es la imagen de $f^{m-n-1}(x)$ y por tanto f es sobreyectiva.

(ii) queda como ejercicio. ■

★ Los ejercicios del 28 al 34 de este tema pueden servirte para comprobar si has asimilado las nociones de esta sección.

5. Ejercicios del Tema

1 Sea $X = \{1, 2, 3, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \{1, a\}, \{4\}, \{a, b, c\}\}$. Di si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

$$\begin{array}{ccccc} a \in X & \{1, a\} \in X & \{1, a\} \subset X & 4 \in X & \{a, b, c\} \subset X \\ 3 \subset X & \{\alpha, \{4\}\} \subset X & \{4\} \subset X & X \subset X & \{a, b, c\} \in X \end{array}$$

2 Di si los siguientes son conjuntos. Caso de ser conjuntos, da una descripción alternativa de ellos: $\boxed{*}$

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$.
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{N}, m > 100\}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x$ se puede escribir de la forma $\frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{N}, m > 100\}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{N}, m = 3\}$.

3 Sea X un conjunto y A, B y C tres subconjuntos de X. Demuestra que si $A \cap C = B \cap C$ y $A \cup C = B \cup C$ entonces $A = B$.

4 Sean X e Y dos conjuntos. Da una condición necesaria y suficiente para que los conjuntos $X \times Y$ e $Y \times X$ sean disjuntos.

5 Sean $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \neq n\}$. Calcula $\cap_n A_n$, $\cup_n A_n$, $\cap_n \overline{A}_n$ y $\cup_n \overline{A}_n$ en donde $\overline{A}_n$ significa el complemento de A_n en $\mathbb{N}$.

6 ¿Es un conjunto la colección de los números naturales que se pueden describir con menos de 15 palabras en castellano? $\boxed{***}$

7 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Demuestra que para todo par de subconjuntos $A, B \subset X$,

- Si $A \subset B$, entonces $f(A) \subset f(B)$.
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

8 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Demuestra que f es inyectiva si y sólo si para todo $A, B \subset X$ se verifica que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

9 Sean X, Y y Z tres conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos aplicaciones. Demuestra:

- Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
- Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva. ¿Será g inyectiva?

10 Da un ejemplo de tres conjuntos no vacíos X, Y y Z y dos aplicaciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ tales que $g \circ f$ sea inyectiva pero g no sea inyectiva.

11 Da un ejemplo de tres conjuntos no vacíos X, Y y Z y dos aplicaciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ tales que $g \circ f$ sea sobreyectiva pero f no sea sobreyectiva.

12 Sea X un conjunto no vacío y $f, g, h : X \to X$ tres aplicaciones. Supongamos que $f \circ g = \mathrm{Id}_X = h \circ f$. Demuestra que $h = g$.

13 Sean X, Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Demuestra:

- f es inyectiva si y sólo si para todo $y \in Y$ se tiene que $\#f^{-1}(\{y\}) \leq 1$.
- f es sobreyectiva si y sólo si para todo $y \in Y$ se tiene que $\#f^{-1}(\{y\}) \geq 1$.

14 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. Demuestra que existe una aplicación inyectiva $g : Y \to X$.

15 Sean X, Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Consideremos la aplicación $\Psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ definida por $\Psi(A) = f(A)$ (para cada $A \subset X$, ver la definición 4 (Pag. 8)). Supongamos que existe un subconjunto $D \subset Y$ tal que para cada subconjunto no vació $A \subset X$ se tiene que $\Psi(A) = D$. Demuestra que f es una aplicación constante. Demuestra que el cardinal de D es 1. $\boxed{*}$

16 Sean X, Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Consideremos la aplicación $\Phi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definida por $\Psi(B) = f^{-1}(B)$ (para cada $B \subset Y$, ver la definición 4 (Pag. 8)). Supongamos que para cada subconjunto $B \subset Y$ se tiene que $\Phi(B) = X$ o $\Phi(B) = \emptyset$. Demuestra que f es una aplicación constante. $\boxed{*}$

17 Sean X, Y dos conjuntos no vacíos. En la definición 4 (Pag. 8) se ha construido una aplicación $\Phi_f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ para cada aplicación $f : X \to Y$. Encuentra una aplicación $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ tal que no exista ninguna aplicación $f : X \to Y$ con $\Phi = \Phi_f$. $\boxed{*}$

18 Sean X, Y dos conjuntos no vacíos. En la definición 4 (Pag. 8) se ha construido una aplicación $\Psi_f : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ para cada aplicación $f : X \to Y$. Encuentra una aplicación $\Psi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ tal que no exista ninguna aplicación $f : X \to Y$ con $\Psi = \Psi_f$. $\boxed{*}$

19 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación.

- Demuestra que la relación $a \mathcal{R} b$ si y sólo si $f(a) = f(b)$ es de equivalencia en X.
- Calcula las clases de equivalencia para la aplicación dada en el ejemplo C (Pag. 8).
- ¿Que propiedad debe de cumplir $\mathcal{R}$ para que f sea inyectiva? ¿Se puede caracterizar la sobreyectividad de forma similar? $\boxed{*}$

20 Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los número naturales. Demuestra que la relación $n \mathcal{R} m$ si y sólo si $n - m$ es múltiplo de 7 es de equivalencia. Calcula el conjunto cociente.

21 La propiedad reflexiva es redundante en una relación de equivalencia: si $a \mathcal{R} b$ por la propiedad simétrica $b \mathcal{R} a$ y por la transitiva $a \mathcal{R} a$. ¿Donde está el error? $\boxed{*}$

22 Dados dos elementos $a, b \in \mathbb{N}$ diremos que a divide a b y lo representamos por $^{a}|_{b}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = ca$. Demuestra que la relación de divisibilidad es una relación de orden en $\mathbb{N}$. Calcula los elementos notables para $Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y para $Z = \{14, 21\}$.

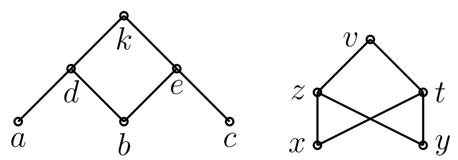
23 Sea X un conjunto no vacío y consideremos el conjunto ordenado $(\mathcal{P}(X), \subset)$. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos. ¿Quien es $\mathrm{Sup}(\{A_i\}_{i\in I})$ e $\mathrm{Inf}(\{A_i\}_{i\in I})$? ¿Son respectivamente máximo y mínimo?

24 Demuestra que en un retículo existe el supremo de cualquier subconjunto finito. **Nota:** Demuestra que $\boxed{*}$

$$Sup\{A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n\} = Sup\{Sup\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}, A_n\}$$

25 Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado tal que todo subconjunto de X posee un único elemento minimal. Demuestra que X posee un buen orden. $\boxed{*}$

26 Sean $(X, \leq)$ y $(X', \leq')$ dos conjuntos ordenados y sea $f : X \to X'$ una aplicación sobreyectiva tal que para todo $a, b \in X$, si $a \leq b$, entonces $f(a) \leq f(b)$. ¿Es cierto que si X es un retículo, X' también es un retículo?. $\boxed{*}$



Sea $f(a) = x, f(b) = y, f(d) = z, f(e) = t, f(k) = v$ y $f(c) = x$

27 Encuentra un conjunto ordenado en donde todo subconjunto posea máximo. ¿Puedes encontrarlo con un subconjunto que no posea mínimo?

28 Sean $\{X_i\}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ una familia de conjuntos no vacíos. Demuestra que el conjunto

$$\{f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} X_i \mid f(i) \in X_i \text{ para todo i}\}$$

es un conjunto equipotente a $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. $\boxed{*}$

29 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Demuestra que $X \times Y$ e $Y \times X$ tienen el mismo cardinal.

30 Demuestra que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ tienen el mismo cardinal. $\boxed{*}$

31 Demuestra que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ no son equipotentes. $\boxed{*}$

32 Sean X e Y dos conjuntos equipotentes. Sea $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$. Demuestra que $X - \{x_0\}$ e $Y - \{y_0\}$ son también equipotentes.

33 Demuestra que $\mathbb{R}$ es equipotente a $\mathbb{R} - \{0\}$.

34 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Supongamos que hay una aplicación inyectiva $f : X \to Y$ y una aplicación inyectiva $g : Y \to X$. Entonces existe una aplicación biyectiva $h : X \to Y$. (Ejercicio muy complicado, hace uso del lema de Zorn [puede ser encontrado en internet]) $\boxed{* * *}$

• Es lógico pensar que si tenemos una aplicación inyectiva $f : X \to Y$ es porque en X hay menos ($\leq$) elementos que en Y. Luego este ejercicio dice que si en X hay menos ($\leq$) elementos que en Y y en Y hay menos ($\leq$) elementos que en X es porque X e Y tienen el mismo número de elementos

35 *Puede existir un conjunto X que verifique la siguiente propiedad: Para todo elemento $a \in X$ se verifica que $a \subset X$.* ***Observar*** *que esta propiedad, en particular, dice que todo los elementos de X son conjuntos.* $\boxed{**}$

36 *Puede existir un conjunto X que verifique la siguiente propiedad: Para todo subconjunto $A \subset X$ se verifica que $a \in X$.*